



TITLE:

不規則表面による波動散乱理論(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

中山, 純一

CITATION:

中山, 純一. 不規則表面による波動散乱理論. 京都大学, 1982, 工学博士

ISSUE DATE:

1982-09-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r4780>

RIGHT:

不規則表面による波動散乱理論

1982年 3 月

中 山 純 一

目 次

第 1 章 序 論

| | |
|-------------------------------------|----|
| 1.1 ま え が き | 1 |
| 1.2 不規則表面による波動散乱 (小史) | 4 |
| 1.3 不規則表面による波動散乱 (従来の理論) | |
| A. Rayleigh の粗さパラメータ | 8 |
| B. キルヒホッフ近似 | 9 |
| C. Shadowing function | 12 |
| D. 積分方程式法 | 13 |
| E. Wood の異常回折と Rayleigh の回折理論 | 14 |
| F. Rice の電磁波散乱理論 | 19 |
| G. Bass-Fuks の方法 | 21 |
| H. 不規則表面の統計モデル | 24 |

第 2 章 不規則表面による波動散乱の確率理論

| | |
|-----------------------------|----|
| 2.1 ま え が き | 26 |
| 2.2 散 乱 波 の 形 | 27 |
| 2.3 波動関数の表現 | 32 |
| 2.4 近似解の計算 | 36 |
| 2.5 散乱の統計的性質 | 41 |
| 2.6 ダイアグラム法による多重散乱の説明 | 51 |
| 2.7 ま と め | 59 |

第 3 章 一次元不規則表面によるスカラー波の散乱 (ノイマン条件)

| | |
|--------------------|----|
| 3.1 ま え が き | 61 |
| 3.2 問題の定式化 | 61 |
| 3.3 展開係数の近似解 | 65 |
| 3.4 散乱特性の計算 | 70 |
| 3.5 表面波モード | 78 |
| 3.6 考 察 | 84 |

第 4 章 二次元不規則表面によるスカラー波の散乱

| | |
|-------------------|----|
| 4.1 ま え が き | 86 |
| 4.2 波動関数の形 | 87 |

| | | |
|-----|-------------------------|-----|
| 4.3 | ガウス不規則表面に対する近似解 | 89 |
| 4.4 | 散乱の統計的性質 | 93 |
| 4.5 | 解析上の問題点 | 101 |
| 第5章 | 不規則表面による電磁波の散乱 — 水平偏波入射 | |
| 5.1 | まえがき | 102 |
| 5.2 | 平面電磁波の散乱 | 103 |
| 5.3 | 電磁界の表現 | 108 |
| 5.4 | 散乱特性の定式化 | 111 |
| 5.5 | 展開係数の計算 — 水平偏波入射 | 117 |
| 5.6 | 散乱特性の計算 | 123 |
| 第6章 | 不規則表面による電磁波の散乱 — 垂直偏波入射 | |
| 6.1 | まえがき | 130 |
| 6.2 | 散乱問題の定式化 | 130 |
| 6.3 | 展開係数の近似解 | 134 |
| 6.4 | 散乱特性の計算 | 139 |
| 6.5 | 補 足 | 147 |
| 第7章 | 結 論 | 149 |

(謝 辞)

| | | |
|-------|----------------------|-----|
| 付 録 A | ウィナー展開について | 154 |
| A 1. | まえがき | 154 |
| A 2. | エルミット多項式による展開 (準備) | 155 |
| A 3. | エルミット多項式の積による汎函展開 | 157 |
| A 4. | 多変数のエルミット多項式による汎函数展開 | 158 |
| A 5. | ガウスランダム測度とウィナー展開 | 163 |
| A 6. | 複素ガウスランダム測度による表現 | 170 |
| A 7. | 確率場のウィナー展開 | 174 |
| 文 献 | | 179 |

第一章 序 論

1.1 ま え が き

周知のように、平坦な二媒質境界面における平面波の屈折と反射はスネルの法則⁽¹⁾に従う。屈折波と反射波の振幅と位相は入射波長と入射角、入射偏波に依存するが、反射角は単一で入射角により一意的に定まる。しかし、境界面が変形し平坦でなくなれば、反射角はもはや単一ではない。周期的に変形した境界面は、入射の角度と波長、変形の周期で定まる離散的角度方向へ入射平面波を回折する。これが、分光・フィルタ・交差偏波の分離などに用いられる回折格子の原理である。周期性が失われ境界面が不規則なれば、全ての方向への散乱が生じ、いわゆる乱反射の状態になる⁽²⁾。実在する物質表面は不規則であることが多いため、この様な乱反射特性の解析は、理論的に興味があるばかりではなく、レーダ（ソナ）信号の不規則海面による散乱、レーダ高度計のための地表面の反射特性⁽³⁾、反射鏡のランダムな変形によるパラボリアンテナの特性の劣化⁽⁴⁾、海面状態や海上風の電波によるリモートセンシング⁽⁵⁾など、工学の種々の問題と密接な関係があるので、実際的にも重要である。

不規則表面は空間的にランダムであるばかりではなく時間的にもランダムに変形することが多い。従って受信した散乱波は時間的・空間的にランダムに変動するので、意味のある情報を得るためには、統計的手法が必要である。統計的見地から、散乱波の平均値部分はコヒーレント波とよばれ、平均値からのずれはインコヒーレント波とよばれる。不規則表面が平面の変形と見なされ、その平均値が平坦面である場合には、コヒーレント反射波は平均値平面による鏡面反射成分のみをもつ。一方、インコヒーレント波は、あらゆる方向への散乱波を含み、乱反射を表現する。このため、インコヒーレント散乱は、しばしば拡散散乱 (diffuse scattering) とよばれる⁽⁶⁾。

実測した乱反射特性の解析と予測、散乱のメカニズムの考察のためには、理論的検討が不可欠である。このため、1950年以後、不規則表面による波動散乱の統計的理論が研究された。統計的散乱理論の方法は、不規則表面の数学的モデル（確率モデル）を想定し、これによる回折・散乱を波動方程式の境界値問題として確率論的に取扱うものである。現実の不規則表面の時間的変動は電波の位相速度（光速）に比較して遅いので、理論解析のモデルとしては時間的に変動しない不規則表面のアンサンブルを想定し、空間的不規則性はガウス

分布をもつ定常確率過程（一様確率場）であると、通常、仮定される。

このような不規則性が入った境界値問題の特徴は、以下の三点に要約される。(a)波動方程式と境界条件は波動関数に関して線形であるが、不規則表面の凹凸の高さが2倍になったとしても散乱波は2倍にならないという意味で、非線形の問題である。(b)散乱波の位相と振幅は、表面の形状（見本過程）に依存して定まるので、散乱波は表面形状の汎関数である。(c)不規則表面と散乱波は、ともにランダム関数であるので、波動方程式の理論と確率（統計）理論の双方に立脚した解析が必要となる。上の(a)(b)は、回折格子の理論と共通であり、解析手法における類似点も多い。また、歴史的にも、不規則表面による散乱理論は回折理論の延長線上に構築されている。しかし、回折格子が離散的スペクトルをもつのに対し、不規則表面は連続スペクトルをもち、かつ、ランダムであるので、理論のあり方は、違ったものになる。(a)(b)(c)の三点は、ランダム媒質中の波動伝搬理論とも共通する。しかし、ランダム媒質中の波動伝搬では、伝搬方向の多重散乱が問題となるのに対し、不規則表面の散乱問題では、二次元の表面内に於ける多重散乱を取扱うことになるので、波動問題としての性格は両者で大きく異なる。両者に共通する困難さは(a)の非線形性であり、ともに厳密解を求めることは困難で、本質的に近似解析によらざるを得ない。

不規則表面による波動散乱の解析法としては、キルヒホッフ近似（1.3 B 節）と Rice の摂動法（1.3 F 節）が有名で、他に有力な解法がないこともあって、実用的計算にしばしば用いられる。キルヒホッフ近似では、表面凹凸の変化がゆるやかで、変化の曲率半径が入射波長に比べて十分大きいこと（短波長極限）を仮定する。このとき、不規則表面は局所的に平坦であるとみなしうるので、全表面からの散乱波は、局所的平坦面からの鏡面反射波の波動論的合成として計算される。従って、散乱のメカニズムは、統計的な鏡面反射である。一方、Rice の摂動法では、不規則表面の凹凸の高さが入射波長に比較して十分小さい場合（長波長極限）を考える。不規則な凹凸を微小量と見なす摂動展開により境界条件を解き、散乱波を計算する。このとき、散乱のメカニズムは、表面のフーリエ成分（ブラッグ・ベクトル）によるブラッグ散乱となる。これらの方法を用いれば散乱波を簡便に求めることができるが、キルヒホッフ近似は境界条件を解かず境界値を仮定するので信頼性が低く、一方摂動法による解は、完全導体表面に対しては発散するという欠点がある。このため、解析の信頼性が高く、近似解析の誤差が明らかにでき、かつ、種々の散乱の性質が計算でき

る体系的・組織的な解析法が要請されていた⁽⁷⁾。

本論文は、この様な要請に答えるために筆者が小倉教授の指導の下で行った研究^{(8)~(16)}をまとめたものである。応用数学に立脚する従来の散乱理論とは異なる確率過程の考えを背景とする新しい解析法を導入して、微小な不規則性をもつ表面 (slightly rough surface) による波動散乱を論じたものであり、解析の基礎となる新しい概念を提案するとともに、従来未解決であった問題の一部にも解答を与えている。

本論文は、序論の他に 6 章及び付録により構成される。次節 (1.2 節) では、この問題の歴史的・技術的背景について述べる。1.3 節では、新しい解析法の意義を明らかにするため、従来の散乱理論の概要を紹介する。この問題について邦文で書かれたレビューがないことを考慮し、今後の筆者自身の研究の参考にすることを目的として、理論の要点を詳しく書いた。しかし、記述方法・表現式は原論文によらず全て書き直してあり、その結論・評価も筆者によるものになっている。第二章は、スカラー平面波の一次元不規則表面 (ディリクレ条件) による散乱を解析する。人工的な回折格子が一次元構造をもつのに対し、一次元の不規則表面は自然界に実在しない。しかし、一次元のモデルは、単純であるため、新しい解析法の開発や方法の本質を理解するのに都合がよいという利点がある。実際、この章は、確率過程の理論を用いる新しい方法のプロトタイプとしての位置を本論文中でしめるものである。ガウス強定常確率過程で記述される無限の不規則表面による波動散乱を定式化し、従来の方法では得られない種々の新しい結果を導く。さらに、コヒーレント散乱 (前方散乱) 振幅、エネルギー保存則 (光学定理)、インコヒーレント散乱の指向性、表面波の平均電力流などを具体的に計算し、結果を図示している。第三章は、第二章の続きとしてノイマン条件の場合を解析している。通常の摂動論は、ディリクレ条件に対しては有効に働くが、ノイマン条件に対しては発散する解を生じる。この様な発散は、回折格子における Wood の異常回折 (1.3 E 節) の解析と共通したものである。本論文では摂動展開ではなく、ウィナー展開を用いて計算するので、この様な発散の困難性を容易に克服することができ、全ての統計量を合理的に計算することができる。実際、第二章で求めた諸量以外に、散乱波のゆらぎ強度 (分散) をも具体的に求め、また異常散乱現象が発生することを明らかにしている。第四章では、スカラー平面波の二次元不規則表面 (ディリクレ条件) による散乱を定式化している。これは、第二章の方法を二次元表

面の場合に拡張したものである。電磁波の散乱を論じる準備であると同時に、現実の音波散乱の問題への一つの解答ともなっている。第5, 第6章では、平面電磁波の散乱を論じている。この問題は、Rice により摂動法を用いて論じられたものであるが(1951), 一次摂動解は発散することが知られ、具体的に解かれることがなかった。しかし、確率論的方法を用いればこのような困難は解決することができ、種々の散乱特性を有限値で合理的に求めうることを示す。同時に、散乱特性の数値計算例をも図示している。第七章は、結言であり、本論文で得られた成果を要約するとともに、未解決の問題について若干の私見を述べている。

本論文では、解析の手段として、ガウス確率過程の非線形理論(ウィナー展開)を用いている。この展開については、Wiener 自身による講義録⁽¹⁷⁾以外に、今村⁽¹⁸⁾, 小倉⁽¹⁹⁾のテキストがあり、二, 三の解説⁽⁹⁶⁾⁽⁹⁷⁾も出版されている。しかし、このような展開は、電波工学・電磁界理論の分野ではほとんど知られていないので、必要な概念と諸公式を付録Aとしてまとめることにした。

本論文では、単色波の場合だけを考え、時間因子 $e^{-i\omega_0 t}$ はすべて省略している。また、MKS 単位系を用いて物理量を表すことにする。

1.2 不規則表面による波動散乱(小史)

実用的な回折格子が発見され、フレネル・キルヒホッフの回折理論が完成したのは、1800年代のことである⁽²⁰⁾が、不規則表面による波動散乱が実際の問題として提起されたのは、かなり遅く、1940年代である。これは、第二次世界大戦中に開発されたマイクロ波レーダにより、不規則なうねりやリップルをもつ海面からのエコーが観測されたことによる。海面エコーは、船舶・航空機などの海面上の標的の識別・同定を困難にするため、米国・英国において多くの測定が行なわれた。当時のレーダーは、モノスタティック・パルス方式であるので、海面の散乱特性を規定する量としてレーダー断面積(単位面積あたりの後方散乱断面積)が導入された。これは、時間関数としてランダムに変動する受信エコー電力を時間平均し、さらに、レーダービームが照射する海面面積で規格化することにより得られる無次元量である。測定されたレーダー断面積は、レーダーの周波数、ビームの偏波、海面条件などに依存することが明らかにされ、受信エコー電力の確率分布やレーダー断面積のビーム入射角依存性などの詳しい測定結果は1951年に出版された⁽²¹⁾。

この様に実測されたデータの解析と散乱特性の予測のためには、散乱のメカ

ニズムを明らかにしうる理論が必要である。研究の初期においては、海面散乱の理論モデルとして、高さと周期がガウス分布する正弦波状表面による回折⁽²¹⁾、及び海面上に存在する霧(spray)と水滴(droplet)による散乱⁽²²⁾、が検討されたが、いずれも実測データを説明しうるものではなかった。この意味で、1940年代は、不規則海面による散乱の発見と後方散乱の測定法が確立した時期と考えることができる。

1950年代には、道路などの地表面の散乱特性がマイクロ波・ミリ波領域で実測され⁽²³⁾⁽²⁴⁾、一方では、海面の後方散乱断面積が風速の関数として測定された。これらは、1965年以後の合成開口レーダー、1970年代の風速・風向のレーダーによるリモートセンシングの基礎となった。

1950年代は、不規則表面による波動散乱理論が、波動方程式の境界値問題として定式化された時期でもある。Rice(1951)⁽²⁵⁾は、電磁波散乱の境界値問題の一解法として、摂動法を導入した。完全導体の不規則表面に対しては、一次摂動解が発散するという欠点があるにもかかわらず、損失のある導体表面や誘電体境界面に対しては、発散しない解が求められるためRiceの方法はその後広く用いられている⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾。一方、Davis(1954)⁽²⁸⁾は、キルヒホッフ近似により海面の散乱特性を解析し、実測値と比較している。これは、通常の状態における海面の凹凸の高さは10～30cmで凹凸の周期は1～10mあり、波長1～3cmのマイクロ波に対しては、凹凸の曲率半径が十分大きいと考えられたためである。キルヒホッフ近似による後方散乱電力の理論値は、レーダービームの入射角(鉛直線から測った角度)が小さいところでは実測値と比較的よく一致するが、入射角が大きいところでは全く一致せず、実測値は理論値よりもはるかに大きいものであった。この様な不一致は、1960年代後半の複合不規則表面モデルにより克服された。

1960年代には、モノスタテックレーダーによる後方散乱特性の測定ばかりではなく、前方散乱(コヒーレント散乱)特性が測定される様になった⁽²⁹⁾。これは、マイクロ波通信回線への海面散乱の影響や、水面付近でのソナ信号のダクト伝搬の解明を意図したものである。一方、水槽を利用したモデル実験が始められたのもこの頃である⁽³⁰⁾⁽³¹⁾。地球物理学に共通したことであるが、自然条件を制御することはできないので、実験データは再現性に欠ける難点がある。しかし、ファンによる風や振動板によって水面上に凹凸を作れば、再現性の高い散乱実験が可能となる。Wright等⁽³²⁾⁽³³⁾は、この方法により水面上に表

面張力波（波長 1 インチ以下の波で capillary wave とよばれる）を発生させ、マイクロ波の後方散乱が表面凹凸のブラッグベクトルにより生ずることを実験により検証し、同時に一次摂動解が与える後方散乱断面積が実測値とよく一致することを見い出した。また、Valenzuela (1967) は、Rice の二次摂動解を用いて、後方散乱における交差偏波の発生を検討した⁽³⁴⁾。

1968 年ごろから、実際の海面は、振幅が大きく波長も長いうねり (swell) 成分と振幅が小さく波長も短い表面張力波のリップル成分の複合であることが認識される様になり、この様な複合表面モデルに基づく解析がなされる様になった⁽³⁵⁾⁽³⁸⁾。この解析法の特徴を簡単に述べれば、キルヒホッフ近似における局所的平坦面の仮定を細いリップルをもつ局所的表面に置きかえるものである。従って、散乱波の計算は、細いリップルをもつ局所的平面に対する摂動解をキルヒホッフ積分により波動論的に合成することになる⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾。この様な散乱理論により後方散乱断面積の角度依存性がほぼ解明された。しかし、散乱断面積の計算に必要な海面の凹凸のスペクトルは、完全には知られておらず、現在においても研究の対象となっている⁽³⁹⁾。

1970 年ごろから、後方散乱を用いた風速のリモートセンシングの実用化が行なわれ始めた。その方法の一つは、海面の散乱断面積は風向及び風速の関数となることを利用して、マイクロ波帯で測定したレーダー断面積から、逆に海面における風速・風向を求めるものである⁽⁵⁾⁽³⁹⁾。第二の方法は、後方散乱波には海面の運動によるドップラシフトが含まれているので、エコーのドップラ成分を解析することにより海面の運動を求めるものである。さらに、風速と海面のスペクトル、海面重力波の分散関係を用いることにより、ドップラシフトが風速に換算される⁽⁴⁰⁾。この様な実験は、HF/VHF 帯 (10~50 MHz) のパルス・ドップラレーダを用いて行なわれ、電離層反射を利用することにより、半径 1000~3000 Km の距離にわたって風速・風向のリモートセンシングが可能であることが報告されている⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾。

一方、散乱の基礎研究としては、超音波の前方散乱の詳しい実験が行なわれた⁽⁴³⁾⁻⁽⁴⁵⁾。これは、人工的な不規則水面による超音波の散乱を調べるものである。実測された鏡面反射波の強度は不規則性が弱いときにはキルヒホッフ近似とよく一致するが、表面の凹凸が波長以上に大となるときには全く一致しない。そこで、Clay 等は、不規則水面の凹凸の確率分布がガウス分布とわずかに異なること、幾何光学的影の効果を考慮することにより、キルヒホッフ近似を修

正しようと試みている。しかし、この様な修正は、全ての入射角に対して一様には成立しない⁽⁴⁴⁾。

多重散乱理論の立場から、キルヒホッフ近似を改良しようとする研究が DeSanto ⁽⁷⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾ により試みられた。これは、キルヒホッフ近似では本来解くべき境界値を仮定することに無理があると考え、境界値に関する積分方程式を解いて、精度の高い近似解を得ようとするものである（1.3 D 節）。しかし、不規則表面上の積分方程式であるため、解法は複雑となり、現在までにコヒーレント散乱強度の近似解が求められているにすぎない。一方、Fung 等⁽⁴⁸⁾⁽⁴⁹⁾は、不規則表面による波動散乱にモーメント法による数値解法を適用している。一次元不規則表面（ディリクレ条件）に対する散乱断面積の数値解が報告されている。

不規則表面による散乱に関係した問題としては、この他に天体表面の性質（誘電率、不規則な凹凸の分布）をレーダーのエコーにより検出・探知する Radar Astronomy，ホログラフィにおけるスペckル雑音，路面状態を探知する赤外線検出器，など枚挙にいとまがない^{(50) - (53)}。

この分野の特徴は、実用を目的とする実験研究が多い反面、波動散乱理論の研究は比較的少く、理論自身も回折格子の理論ほどには整理されていないことである。

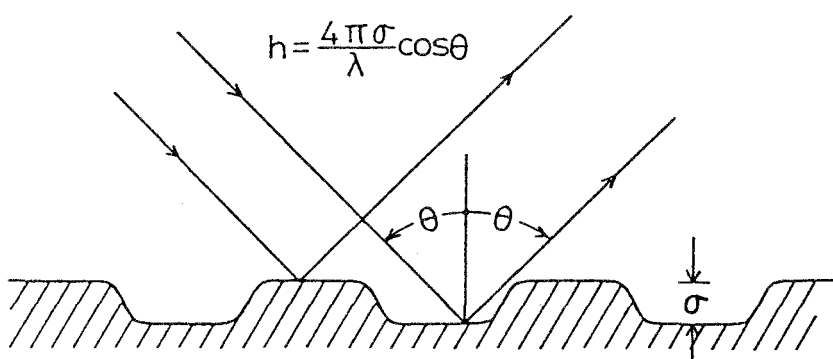
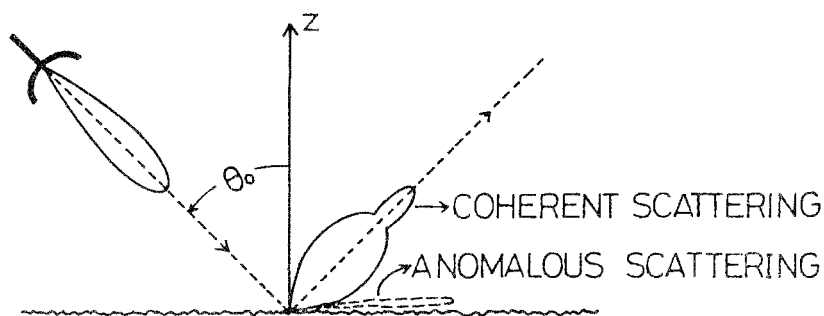
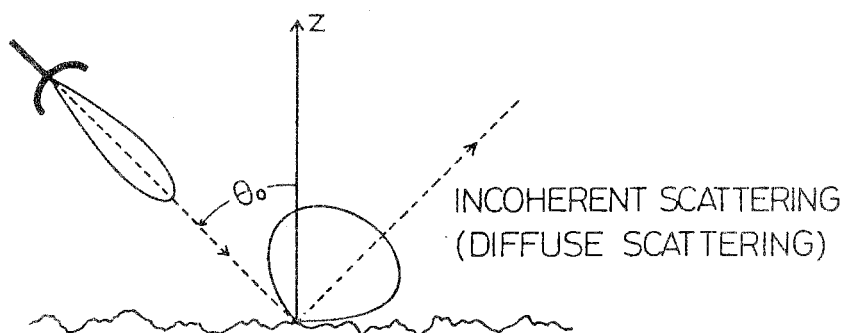


図 1.1 RAYLEIGH'S ROUGHNESS PARAMETER h



(a) SLIGHTLY ROUGH CASE $h \ll 2\pi$



(b) VERY ROUGH CASE $h \gg 2\pi$

図 1.2 不規則性の大きさ h による散乱特性の変化

1.3 不規則表面による波動散乱（従来の理論）

本節では，不規則表面による波動散乱に関する従来の理論を紹介するとともに，後に必要となる概念を述べ，本論への準備としたい。〔以下では，単色波のみを考え，時間因子を $\exp(-i\omega_0 t)$ とする。〕

A. Rayleighの粗さパラメータ

不規則表面による波動散乱では，不規則性の大きさを表すことが重要である。不規則性の大きさは，通常，Rayleighの粗さパラメータ (Rayleigh's roughness parameter)

$$h = \frac{4\pi\sigma}{\lambda} \cos\theta_0 = 2k\sigma \cos\theta_0 \quad (1.1)$$

により記述される。ここで、 θ_0 は入射角、 σ は不規則表面の凹凸の大きさ、 λ は波長、 k は波数である（図 1.1）。図より明らかに、 h は凹凸の山と谷からの鏡面反射波の位相差である。 $h \ll 2\pi$ では入射ビームはほとんど鏡面反射（specular reflection）される（図 1.2 a）。 h が増大すれば、表面の各部分からの鏡面反射波は、その位相差のため、相互に打ち合うので、全体として鏡面反射方向への反射波は減少し、他の方向への散乱波が増大する（図 b）

個別の不規則表面においては、場所ごとに凹凸の大きさが異なる。このとき、(1.1) 式の σ は、凹凸の実効値（自乗確率平均の平方根）であると定義される。Rayleigh の粗さパラメータは、物理光学の考えを背景とするので、不規則表面の変化がゆるやかで、局所的に平坦である場合には有効である。しかし、このパラメータは、表面の変化が急峻である場合には意味をもたない。

実際、水平方向へのインコヒーレント散乱特性に鋭いピークが現われることがある（図 1.2 a）。これが、第 3 章以後で述べる異常散乱（anomalous scattering）であり、筆者らの理論解析により始めて明らかにされた。

B. キルヒホッフ近似

図 1.3 に示す不規則表面 S によるスカラー平面波の散乱を考える。ここで、不規則表面 S は、台が $2L \times 2L$ の x, y 平面上の関数 $f(x, y)$ により

$$z = f(x, y), \quad -L \leq x, y \leq L \quad (1.2)$$

で与えられるとする。三次元空間の座標を \mathbf{R}, \mathbf{R}' で表わし、入射平面波を

$$\psi_i(\mathbf{R}) = \exp\{i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}\}$$

と書く。ここで \mathbf{K}' は入射波動ベクトルである。グリーンの定理を S, S' 及び半球 S_ρ で囲まれた体積に適用すれば、散乱波 $\psi_s(\mathbf{R})$ は

$$\psi_s(\mathbf{R}) = \int_{S+S'+S_\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \cdot \psi_s(\mathbf{R}') - G(\mathbf{R}|\mathbf{R}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_s(\mathbf{R}) \right\} dS \quad (1.3)$$

と表現される。ただし、 $\frac{\partial}{\partial n'}$ は内向きの法線微分、 $G(\mathbf{R}|\mathbf{R}')$ は自由空間のグリーン関数

$$G(\mathbf{R}|\mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} \quad (1.4)$$

であり、 R' は $S+S'+S_\rho$ 上の座標を表すベクトルである。

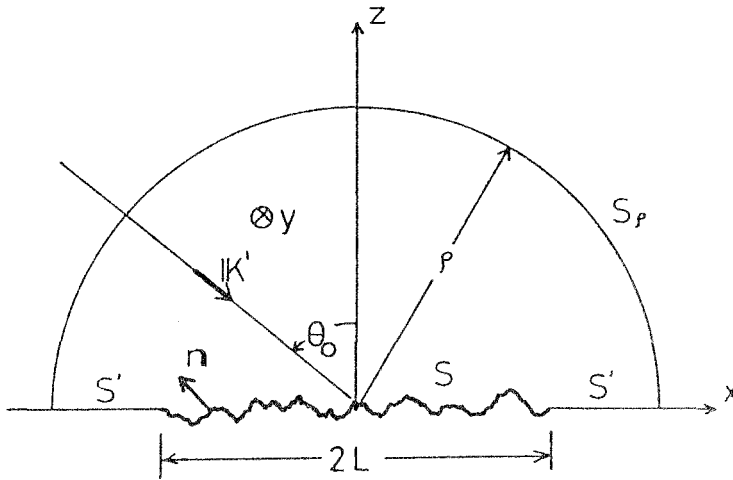


図 1.3 不規則表面 S による平面波の散乱

(1.3) は、境界値 ψ_s 、 $\partial\psi_s/\partial n'$ により散乱波を表す。従って、散乱波を計算するには境界値を求めねばならず、これを求めるためには、摂動法や積分方程式法により境界条件を解く必要がある。しかし、キルヒホッフ近似では、物理光学の近似法により境界値を推定する。すなわち、

(1) 不規則表面 S は波長 λ に比べて十分大きい ($L \gg \lambda$) ので、 S' 上では散乱波は小さく無視できる。つまり、

$$\psi_s(R') \simeq 0, \quad \frac{\partial\psi_s(R')}{\partial n'} \simeq 0, \quad (R' \in S') \quad (1.5)$$

この仮定の下では (1.3) は $S+S_\rho$ 上の積分になる。さらに、半球の半径 $\rho \rightarrow \infty$ の極限をとれば、(1.4) が放射条件を満たすので S_ρ 上の積分は零に収束することになり、結局 (1.3) は S 上の積分で近似できることになる。

(2) S の凹凸の変化がゆるやかで、凹凸の曲率半径は波長 λ に比べて十分大きいので、 S は局所的には平面と見なすことができる。従って、 S 上の点 p における境界値は、 p に接する平面上での境界値で近似できる。この様な近似のため、キルヒホッフ近似はしばしば接平面近似 (tangential plane approximation) とよばれる。

S 上の境界条件として同次ディリクレ条件

$$\psi(R') = \psi_i(R') + \psi_s(R') = 0, \quad R' \in S \quad (1.6)$$

を仮定すれば、接平面近似により境界値

$$\psi_s(R') \simeq -\psi_i(R')$$

$$\frac{\partial \psi_s(R')}{\partial n'} \simeq (iK' \cdot n') \psi_i(R') \quad (1.7)$$

が定まる。(1.5) (1.7) を用いれば (1.3) は簡単化され

$$\psi_s(R) \simeq \int_S \frac{\partial}{\partial n'} \{ G(R|R') \psi_i(R') \} dS \quad (1.8)$$

と書ける⁽⁵⁾。この式の特徴は、不規則表面 S 上の積分であることで、 n' , R' はいずれもランダムベクトルである。また、この積分を S の近傍で評価することは困難であるため、通常、遠方での散乱特性だけが議論される。一様かつ等方のガウス分布をする不規則表面に対しては、散乱波の平均値 (コヒーレント波) $\langle \psi_s(R) \rangle$ は、不規則性がない平坦面による散乱波 $\psi_{so}(R)$ により

$$\langle \psi_s(R) \rangle = \rho \psi_{so}(R) \quad (1.9)$$

と書かれる。ここで、記号 $\langle \rangle$ は (アンサンブル) 平均を表し、鏡面反射に対する係数 ρ は

$$\rho = \exp \{ -2k^2 \sigma^2 \cos^2 \theta_0 \}, \quad (1.10)$$

$$\text{但し} \quad \sigma^2 = \langle f^2(x, y) \rangle \quad (1.11)$$

で与えられる。(1.10) の特徴は、Rayleigh の粗さパラメータ $2k\sigma \cos \theta_0$ の関数となっていることであり、平坦な表面がガウス分布に従って上下するときの、散乱波の平均値と解釈できる⁽⁷⁾。

実用上、重要なレーダ断面積 (単位面積あたりの後方散乱断面積) σ^B は、(1.8) より、

$$\sigma^B(\theta_0) = \frac{4\pi R^2}{(2L)^2} \langle |\psi_s(R) - \langle \psi_s(R) \rangle|^2 \rangle \quad (1.12)$$

$$\simeq \frac{4\pi}{\tan^2 \theta_r \cdot \cos^4 \theta_0} \exp \left\{ -\frac{\tan^2 \theta_0}{2 \tan^2 \theta_r} \right\}, (k\sigma \gg 1) \quad (1.13)$$

と計算される⁽⁶⁾。ここで θ_r は不規則表面の自乗平均勾配であり、

$$\tan^2 \theta_r = \langle (\text{grad} f(x, y))^2 \rangle \quad (1.14)$$

で定義される。(1.13) の特徴は波数 k に依存しないことであり、幾何光学領

域での球による散乱と類似している。

境界条件が、ノイマン条件

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{R}')}{\partial n'} = 0, \quad \mathbf{R}' \in S \quad (1.15)$$

の場合には、散乱波の位相が 90° 変化するが、(1.9)(1.10)(1.13) の関係式は不変である。電磁波の散乱は、(1.3) に対応する Stratton の公式⁽⁵⁶⁾、またはダイアディックグリーン関数による表現⁽⁵⁵⁾を用いることにより、同様に論じられる。キルヒホッフ近似では、境界値を接平面近似を用いて評価するので、完全導体の不規則表面に対しては散乱波の振幅は入射偏波に依存せず、後方散乱は交差偏波を含まない⁽⁵⁶⁾⁻⁽⁵⁸⁾。

C. Shadowing function

平面波が斜め入射する場合、不規則表面上に影が生ずる(図 1.4)。影領域の表面部分は、ほとんど散乱波を生じないと考えられるので、(1.8) を全表面 S で積分せず日向部分に限定して積分すれば、より正確に散乱波が評価できる。しかし、不規則表面に対して、日向部分を具体的に求め積分を実行することは現実的ではない。そこで、Beckmann は、入射角が θ_0 であるとき表面の単位面積が日向である確率 $S(\theta_0)$ を導入して、等価的に影の効果を取り入れるこ

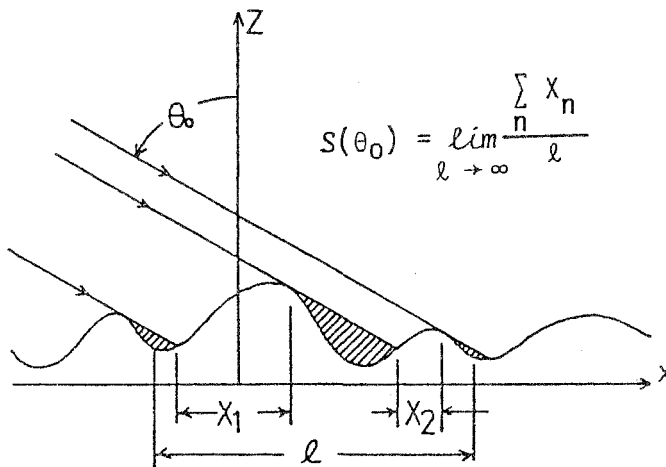


図 1.4 shadowing function

とを提案し、 $S(\theta_0)$ を Shadowing function と呼んだ⁽⁵⁹⁾。コヒーレント散

乱強度は不規則表面の面積（台の面積）の二乗に比例するので、 $S^2(\theta_0)$ を乗じ、一方、インコヒーレント散乱の全電力は面積に比例するので $S(\theta_0)$ を乗ずることになる。

同様の考えにより、bistatic shadowing function $S(\theta_0, \theta)$ が定義される。これは、入射角 θ_0 に対して日向であり、かつ散乱角 θ にある観測点に直接一次散乱波が到達する確率である。ガウス分布をもつ1次元不規則表面に対しては、計算機シミュレーションにより詳しい shadowing function が求められている⁽⁶⁰⁾。

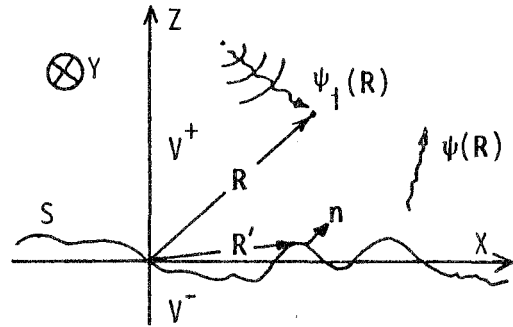


図 1.5 不規則表面 S と上の領域 V^+

D. 積分方程式法

キルヒホッフ近似では、接平面近似を用いて境界値を推定するが、本来、境界値や影の効果、多重散乱の効果などは、境界値問題を解くことにより自動的に得るべきものである。境界値問題の解法としては、積分方程式による方法と境界整合法（E 節）が知られている。DeSanto 等は、前者の方法により不規則表面による波動散乱を定式化している⁽⁷⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾。

無限不規則表面 S が三次元空間を上部 V^+ と下部 V^- に分けるとする（図1.5）。波源が V^+ にあるとすると、グリーンの定理により波動関数 $\psi(R)$ は、

$$\begin{aligned} \psi(R) &= \psi_i(R) + \int_S \left\{ \frac{\partial G(R|R')}{\partial n'} \psi(R') - G(R|R') \frac{\partial \psi(R')}{\partial n'} \right\} dS, \quad R \in V^+, R' \in S \\ &= 0, \quad R \in V^- \end{aligned} \quad (1.16)$$

と書ける。ここで ψ_i は入射波、 G は自由空間のグリーン関数（1.4）である。ノイマン条件（1.15）を仮定すれば、被積分関数中の第二項は消えるので（1.16）は

$$\begin{aligned} \psi(R) &= \psi_i(R) + \int_S \frac{\partial G(R|R')}{\partial n'} \psi(R') dS, \quad R \in V^+ \\ &= 0, \quad R \in V^- \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。 R が S 上にあるとき、グリーン関数の特異性のため右辺の積分はリーマン積分としては存在しない。しかし、 $R=R'$ の一点を除いた広義積分（主値積分）⁽⁶¹⁾⁽⁶²⁾ としては定義でき、境界値の関係式

$$\frac{1}{2} \psi(\mathbf{R}) = \psi_i(\mathbf{R}) + \int_S \frac{\partial G(\mathbf{R}|\mathbf{R}')}{\partial n'} \psi(\mathbf{R}') dS, \quad \mathbf{R} \in S \quad (1.18)$$

が得られる。これを解いて境界値 $\psi(\mathbf{R})$ を求めれば、(1.17)により V^+ 内の波動関数 ψ を得ることができる。

(1.18)の積分項を無視すれば、境界値の零次近似として

$$\psi(\mathbf{R}) \simeq 2\psi_i(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \in S \quad (1.19)$$

が得られる。これは、キルヒホッフ近似が与える近似境界値に等しい。この意味で、キルヒホッフ近似は単一散乱解であり、多重散乱を含まない。(1.18)を逐次近似で解けば、多重散乱解が得られる。しかし、境界値のこの級数表示は、 \mathbf{R} と \mathbf{R}' がともに不規則表面上のランダムベクトルであるため、煩雑で見通しの悪いものである。そこで、級数の図形表示法(ダイアグラム法)を用いることにより、コヒーレント波 $\langle \psi(\mathbf{R}) \rangle$ 、散乱強度 $\langle |\psi(\mathbf{R})|^2 \rangle$ が満たす近似積分方程式が導かれる。現在、コヒーレント波に対する数値計算結果が得られているが、インコヒーレント散乱に対する具体的な結果は得られていない⁽⁴⁶⁾。この方法の欠点は、近似方程式の導出過程が極めて複雑で見通しが悪いため、用いられた近似方法の有効範囲が見にくいことである。また、逐次近似級数の収束に関する保障がないという欠点もある⁽⁷⁷⁾⁽⁸¹⁾。

E. Woodの異常回折とRayleighの回折理論

1902年、Woodは反射形エシュレット格子を用いた分光実験において、今日Woodの異常回折(Wood's anomaly)とよばれる新しい現象を発見した⁽⁶³⁾。それは、回折波の強度がある狭い入射波長内において急激に変化する現象で、白色光の分光スペクトル分布における明るいバンドと暗いバンドとして観測された⁽⁶⁴⁾。この現象は、入射電界が格子に平行(TE波)であるときには生ぜず、TM波入射に対して発生する。この様な偏波依存性、及び回折強度の急激な変化は、キルヒホッフ近似では説明できない現象であるので、anomalyとよばれる。

Woodのエシュレット格子は光の波長に近い格子寸法(ピッチ 1.7μ)をもつので、もはやキルヒホッフ近似は成立せず、格子上での境界条件を正確に解く必要がある。この観点から、Rayleighは摂動法を用いる新しい回折理論を提案した(1904)⁽⁶⁵⁾。Rayleighの理論は、次項のRiceの理論の出発点であるばかりではなく、重要な問題を提起しているのでその概要をスケッチして

おこう。

Rayleigh は、無限の周期的表面（完全導体）による平面波の回折を考えた（図 1.6 参照）。簡単のため、角がない格子を考え、格子形状がフーリエ級数

$$z=f(x)=\sum_n F_n \exp(i 2\pi n x/a), (F_0=0, F_n^*=F_{-n}) \quad (1.20)$$

で表現されるものとする。ここで * は、複素共役を表し、 a は格子の周期、 $(2\pi n/a)$ はブラッグ・ベクトルである。表面の周期性により、平面波入射に対する波動関数 $\phi(z, x)$ を Floquet の形

$$\phi(z, x)=e^{iK_0 x}\left\{e^{-iK_z z}+\sum_n u_n \exp\left[i\frac{2\pi n}{a}x+i k_z(n)z\right]\right\}, \quad (1.21)$$

$$K_z=\sqrt{k^2-K_0^2},$$

$$k_z(n)=\sqrt{k^2-\left(\frac{2\pi n}{a}+K_0\right)^2}, \quad \left\{k^2>\left(\frac{2\pi n}{a}+K_0\right)^2\right\} \quad (1.22a)$$

$$=i\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{a}+K_0\right)^2-k^2}, \quad \left\{\left(\frac{2\pi n}{a}+K_0\right)^2>k^2\right\} \quad (1.22b)$$

に書く⁽⁶⁶⁾。(1.21) 右辺の指数因子は、 x 方向への位相推移を表わし、括弧内の第 1 項は入射平面波、級数部は x に関する周期関数で、回折波を表す。 K_0 と K_z は、それぞれ入射波数ベクトルの x 成分、 z 成分であり、 $(K_0+2\pi n/a)$

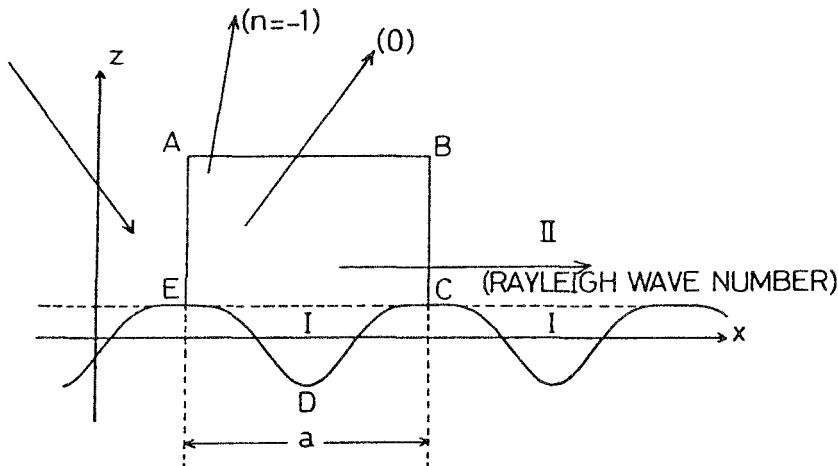


図 1.6 周期的表面による平面波の回折（谷の領域 I と外部領域 II）

と $k_z(n)$ はそれぞれ n 次回折波の波数ベクトルの x 成分、 z 成分である。正数の $k_z(n)$ は z 方向に伝搬する回折波に対応し、純虚数の $k_z(n)$ はエバネセン

トな表面波を意味する。

TE波入射のとき ψ は電界の y 成分 E_y であるので、境界条件は、

$$(TE) \quad \psi(z, x) = 0, \quad (z = f(x)) \quad (1.23)$$

である。TM波入射に対しては ψ は磁界の y 成分 H_y を表すので、境界条件は、

$$(TM) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (z = f(x)) \quad (1.24)$$

となる。

$\psi(z, x)$ を求めることは、(1.21)の未知展開係数 u_n を境界条件により定めることに帰着する。表面 $f(x)$ が余弦状に変化する場合、 u_n は、ベッセル関数を係数にもつ無限次元代数方程式により定まる⁽⁶⁷⁾。一般の周期的表面に対しては、Rayleighは摂動法を用いている。

表面の凹凸の高さ σ が波長に比べて十分小さい(係数 F_n は σ のオーダーの微小量)と仮定して、 u_n 及び $\exp\{ik_z(n)f(x)\}$ を摂動展開する。

$$u_n = u_n^{(0)} + \sigma u_n^{(1)} + \sigma^2 u_n^{(2)} + \dots, \\ \exp\{ik_z(n)f(x)\} = 1 + ik_z(n)f(x) - \frac{1}{2}k_z^2(n)f(x)^2 + \dots \quad (1.25)$$

(1.20)(1.21)をTE波の境界条件(1.23)へ代入し、展開(1.25)を用いれば、摂動解が求められる。摂動の零次解、1次解はそれぞれ

$$(TE) \quad u_n^{(0)} = -\delta_{n0} \\ u_n^{(1)} = -2iK_z F_n \quad (1.26)$$

となる。同様に、TM波の(1.24)に対しては、

$$(TM) \quad u_n^{(0)} = \delta_{n0} \\ u_n^{(1)} = -\frac{2iF_n}{k_z(n)} [K_z^2 - K_0 \left(\frac{2\pi n}{a}\right)] \quad (1.27)$$

となる。TE波の場合、一次摂動 $u_n^{(1)}$ は全ての次数 n に対して有界であるが、TM波の場合には一次摂動解 $u_n^{(1)}$ は、(1.27)より明らかに、

$$k_z(n) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{a} + K_0\right)^2} = 0 \quad (1.28)$$

となる入射波数 $K' = (K_0, K_z)$ に対して発散する。(1.28)は x 方向に伝搬する回折波を意味する。一次摂動解が発散すれば高次摂動解も発散するため、ある次数 n に対して(1.28)が成立すれば全ての係数 u_n が発散することになる。[この特異性のため、(1.28)を満たす波数ベクトル $\mathbf{k} = (K_0 + 2\pi n/a, k_z(n))$ はRayleigh波数とよばれる]。Woodの実験結果との比較により、Rayleigh

は(1.28)を満たすとき Anomaly が発生することを指摘した。⁽⁶⁸⁾

この様に、Rayleigh は、Wood の異常回折が発生する条件を明らかにしたが、回折波の振幅を定量的に解析することには成功しなかった。異常回折の定量的な解析がなされたのは、比較的最近のことで、周期的なリアクタンス平面の場合(1965)⁽⁶⁹⁾、平板状格子の場合(1968)⁽⁷⁰⁾に解析的に解かれた。

この結果、Rayleigh 波数に対する係数 u_n は発散することはないが非常に大きい値をとることが明らかにされ、同時に、Anomaly 発生 of 物理的原因は、周期的表面に沿って伝搬する自由モード(表面波モード、リーキ波)であることが指摘された。

Rayleigh の解法の特徴は、(1.21) の様に波動関数を回折モードに展開し、次に境界条件を満たすように回折モードの係数 u_n を定めることである。この方法は、円筒散乱の問題において円筒内部の場をベッセル関数で、外部の場をハンケル関数でそれぞれ展開し、これら二つの場を境界上で接続する方法と同じ考えによるもので、境界整合法⁽⁷¹⁾とよばれる。積分方程式法では、先ず境界値を解き、次に境界値を用いて外部の波動場を求めるという二段階の処理が必要であるのに対して、境界整合法では、展開したモード振幅(展開係数)を決めるだけで波動場が求められる利点がある。

Rayleigh の境界整合法に対して重要な疑問が提起された⁽⁷²⁾。それは、格子の山と谷の間(図 1.6 の領域 I)では、外向きに伝搬する回折波だけではなく、内向きの反射波が存在するはずであり、したがって、(1.21) のように外向きの回折波(及び表面波)だけで波動場を表現するのは誤りではないか、というものである。(1.21) の展開が図の領域 II で成立することは明らかであるが、領域 I 及び表面 S 上でも成立するとするのは一つの仮説にすぎない。この仮説は、今日、Rayleigh の仮説(Rayleigh's hypothesis)とよばれる。

Rayleigh の仮説には、種々の議論があったが、今日次の二つの考え方が有力となっている。第一の考え方は、(1.21) の一様収束性に着目するものであり、第二の考え方は n の部分和をとるものである。

もし、(1.21) が境界 S を含む領域において一様収束し、かつ境界条件及び波動方程式を満たせば、散乱問題の一意性の定理により、(1.21) は回折問題の一意的な解である。従って、(1.21) が一様収束する (x, z) 領域を求め、この領域が表面 S を含むならば Rayleigh の仮説は成立すると言える。この考えに基づいて、角をもつ表面に対しては Rayleigh の仮説は成立しないが、

余弦状の表面

$$z = f(x) = b \cos \kappa x \quad (1.29)$$

では、傾きが小さく

$$\kappa b < 0.448 \quad (1.30)$$

であれば Rayleigh の仮説が成立することが証明された⁽⁷³⁾。最近、種々の反射型格子に対してこの仮説の成立条件が求められている⁽⁷⁴⁾。

第二の考えは、(1.21)の部分和を、

$$\psi_N(z, x) = e^{iK_0 x} \left[e^{-iK_z z} + \sum_{-N}^N u_n(N) \exp \left(i \frac{2\pi n}{a} x + k_z(n)z \right) \right] \quad (1.31)$$

とおき、境界条件の自乗平均誤差を最小となる様に展開係数を決定するものである。たとえば、ディリクレ条件(1.23)では、境界上の自乗平均誤差が最小

$$e_b^2(N) = \int_0^a |\psi_N(f(x), x)|^2 ds = \text{最小}$$

となる様に $(2N+1)$ 個の係数 u_n を定める。ここで u_n は、(1.31)の展開項数に依存して定まるので $u_n(N)$ と書かれる。この様に $u_n(N)$ を定めるとき、一様収束の意味での Rayleigh の仮説が成立するか否かにかかわらず、 $N \rightarrow \infty$ の極限において部分和 ψ_N は境界を除く領域 I, II では真の解に広義一様収束することが証明される。(しかし、境界 S 上では、 ψ_N は自乗平均収束するにすぎない)。⁽⁷⁵⁾⁻⁽⁷⁶⁾ この様な部分和(1.31)の性質は、Rayleigh の展開定理とよばれ、散乱・回折問題の数値解析にしばしば用いられている⁽⁷⁸⁾。しかし、不規則表面に対しては、Rayleigh の仮説は検討されておらず、理論的に未解決である。

Floquet の解(1.21)を用いれば、エネルギー保存則(光学定理)を容易に導くことができる。ヘルムホルツ方程式の保存則 $\text{div}[\text{Im}(\psi^* \text{grad} \psi)] = 0$ を図 1.6 の領域(ABCDEA)で積分し、ガウスの定理により表面積分(線積分)に書き換えれば、

$$\frac{1}{ak} \int_0^a \text{Im}(\psi^* \frac{\partial}{\partial z} \psi) dx = -\frac{K_z}{k} + \frac{1}{k} \sum_n k_z(n) \cdot |u_n|^2 = 0 \quad (1.32)$$

が得られる。この右辺の級数和は実の $k_z(n)$ を生ずる n についての和である。(1.32)は、入射電力(K_z/k)が、回折波電力の総和(級数部)に等しいことを表している。

(25) F. RICE の電磁波散乱理論

確率場のフーリエ級数表現と Rayleigh の回折理論とを組合せて、Rice は不規則表面による電磁波散乱を定式化した。先ず、不規則表面を x, y 方向ともに周期 L をもつ周期関数と見なしてフーリエ級数

$$z = f(x, y) = \sum_{m,n} b_{mn} \exp\{2\pi i(mx + ny)/L\} \quad (1.33)$$

に展開する。ここでフーリエ係数 b_{mn} は次の性質をもつ複素ガウスランダム変数である。

$$b_{mn} = b^{*-m-n}$$

$$\langle b_{mn} \rangle = 0, \langle b_{mn} \cdot b^{*m'n'} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'} |F_{mn}|^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \quad (1.34)$$

従って、 $f(x, y)$ の平均値と相関関数は

$$\langle f(x, y) \rangle = 0,$$

$$\langle f(x', y') f(x+x', y+y') \rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{mn} |F_{mn}|^2 \exp\left\{\frac{2\pi i}{L}(mx + ny)\right\} \quad (1.35)$$

となる。ここで、周期 L を無限大とすれば、(1.35) の和は積分になり、

$$\langle f(x', y') f(x+x', y+y') \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda_x, \lambda_y)|^2 e^{i(x\lambda_x + y\lambda_y)} d\lambda_x d\lambda_y \quad (1.36)$$

となる。これが、RICE の確率場の表現法であり、その特徴は、先ず周期関数と見なしてフーリエ級数で表現し、次に、平均値、相関々数などを計算し、最後に周期を無限大として、無限に広い確率場の統計量を導出するという三つの段階から組立てられていることである⁽⁷⁹⁾。

Rice の散乱理論も、この三段階に従って組立てられる。先ず周期的不規則表面 (1.33) に対して、電界 $E = (E_x, E_y, E_z)$ を Floquet の形

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = e^{iK_0 x} \left[\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} e^{-iK_z z} + \sum_{m,n} \begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{pmatrix} \exp\left\{\frac{2\pi i}{L}(mx + ny) + i k_z(m, n) z\right\} \right] \quad (1.37)$$

に書く*。これは (1.21) の拡張版であって、[] 内の第一項は入射平面波、級数部は散乱 (回折) 波に対応する。但し、(1.37) では入射面を (x, z) 面に取り、入射波動ベクトル K' を

*) 原論文⁽²⁵⁾では、離散的な入射角を考えている。

$$\mathbf{K}' = (K_0, 0, -K_z) = (k \sin \theta_0, 0, -k \cos \theta_0) \quad (1.38)$$

と置いた (図 1.7 参照)。回折波の z 方向への波数 $k_z(m, n)$ は,

$$k_z(m, n) = \sqrt{k^2 - \left(K_0 + \frac{2\pi m}{L}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}, \quad \text{Im} k_z(m, n) \geq 0 \quad (1.39)$$

で与えられる。未知の係数 (A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}) は, 横波の条件

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (1.40)$$

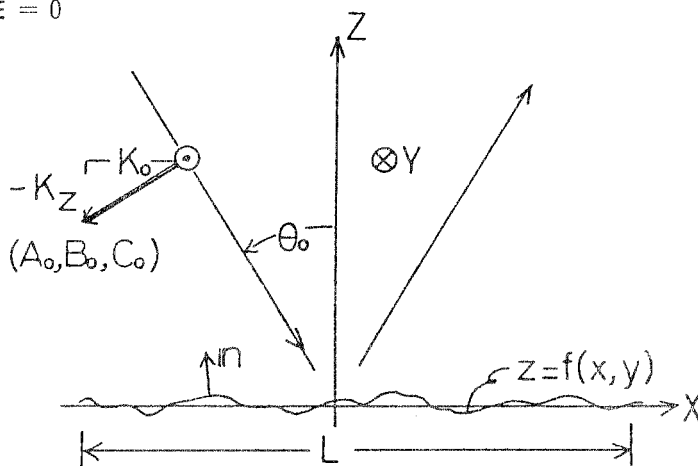


図 1.7 不規則表面による電磁波散乱

及び完全導体表面 (1.33) での境界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad z = f(x, y)$$

を解いて求めることになる。不規則表面の凹凸が波長に比べて十分小であると仮定し, Rayleigh の摂動法を適用すれば, 以下の様に係数が定まる。

(水平偏波入射, $A_0 = C_0 = 0, B_0 = 1$)

$$\begin{aligned} A_{mn} &= 0 + 0 + \dots\dots\dots \\ B_{mn} &= -\delta_{n0} \delta_{m0} - 2i K_z b_{mn} + \dots\dots\dots \\ C_{mn} &= 0 + \frac{2i K_z (2\pi n/L)}{k_z(m, n)} b_{mn} + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.41)$$

(垂直偏波入射, $A_0 = -K_z/k, B_0 = 0, C_0 = -K_0/k$)

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{K_z}{k} \delta_{0m} \delta_{0n} + \frac{2i}{k} \left[K_z^2 - K_0 \left(\frac{2\pi m}{L} \right) \right] b_{mn} + \dots\dots\dots \\ B_{mn} &= 0 - 2i \left(\frac{2\pi n}{L} \right) K_0 b_{mn} + \dots\dots\dots \\ C_{mn} &= -\frac{K_0}{k} \delta_{0m} \delta_{0n} - 2i \frac{K_0 \left[\left(K_0 + \frac{2\pi m}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 \right] - k^2 \left[K_0 + \frac{2\pi m}{L} \right]}{k \cdot k_z(m, n)} b_{mn} + \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

(1.41)(1.42) 右辺の第一項は零次の摂動解を，第二項は1次の摂動解を表す。この解は，Rayleighの回折理論と同じ欠点をもつ。すなわち，Rayleigh波数

$$k_z(m, n) = \sqrt{k^2 - \left(K_0 + \frac{2\pi m}{L}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2} = 0 \quad (1.43)$$

を与える m, n, K_0 に対して C_{mn} が発散する。回折格子の場合には，周期 L が有界であるので，この様な発散は，(1.43)を満たす特別の入射角に対してのみ発生する。しかし，不規則表面の場合には， $L \rightarrow \infty$ の極限をとるので，あらゆる入射角に対して E_z の分散が発散することになる。

G. Bass-Fuksの方法⁽⁵⁴⁾

Rayleigh-Riceの摂動法やMarshの逐次近似法⁽⁸⁰⁾は系統的で理解しやすいが，実用的な1次，2次摂動解が発散するという欠点をもつ。この欠点は摂動級数の収束が極めて悪いことを示唆しているので，何らかの工夫により収束の早い展開方法を得ることが望ましい。ソビエトのBass-Fuksは，摂動法とは異なる展開法を導入して，簡単な計算により多重散乱効果を含む散乱波動解を求めた。本論文と関係が深いので，彼等の方法の概要を以下に述べる。

Bass-Fuksは，まず，不規則表面

$$z = f(x), \quad (1.44)$$

$$\langle z \rangle = \langle f(x) \rangle = 0, \quad \langle z^2 \rangle = \langle f^2(x) \rangle = \sigma^2$$

の粗さが，波長に比べて十分小さい($k\sigma \ll 2\pi$)と仮定して，境界条件を近似する。たとえば，ディリクレ条件

$$\psi(z, x) = 0, \quad (z = f(x)) \quad (1.45)$$

に対しては，テイラー展開による一次近似の境界条件

$$\psi(0, x) + f(x) \frac{\partial \psi(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (1.46)$$

から出発する。この近似境界条件は，effective boundary conditionとよばれることがある。第二章では，(1.46)をランダム境界条件のモデルとして用いている。

次に，波動関数を摂動展開するのではなく，コヒーレント波 $\langle \psi(z, x) \rangle$ とインコヒーレント波 $\psi_s(z, x)$ に分ける。

$$\psi(z, x) = \langle \psi(z, x) \rangle + \psi_s(z, x) \quad (1.47)$$

これを近似境界条件に代入し，平均値と変動部分に分割すれば，

$$\langle \psi(0, x) \rangle + \langle f(x) \frac{\partial}{\partial z} \psi_s(z, x) \Big|_{z=0} \rangle = 0, \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \psi_s(0, x) + f(x) \frac{\partial \langle \psi(z, x) \rangle}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ + \left\{ f(x) \frac{\partial \psi_s(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \langle f(x) \frac{\partial \psi_s(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

が得られる。(1.49) 左辺第三項は、高次項であるので無視すれば、

$$\psi_s(0, x) + f(x) \frac{\partial \langle \psi(z, x) \rangle}{\partial z} \Big|_{z=0} \simeq 0 \quad (1.50)$$

となる。この式と(1.48)をコヒーレント波 $\langle \psi(z, x) \rangle$ とインコヒーレント散乱波 $\psi_s(z, x)$ との連立方程式と見なして解くことができる。

平面波が入射するとき、コヒーレント反射波は鏡面反射成分のみをもつから、

$$\langle \psi(z, x) \rangle = e^{iK_0 x} \left[-e^{-iK_z z} + (1+A_0) e^{iK_z z} \right] \quad (1.51)$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - K_0^2} > 0, \quad z \geq 0$$

と書ける。ここで、右辺括弧内の第一項は入射平面波に対応し、第二項はコヒーレント反射波であり、 A_0 は未知の定数である。一方、 $f(x)$ が強定常確率過程であると仮定して、スペクトル表現する。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} db(\lambda) \quad (1.52)$$

ここで、 $db(\lambda)$ はランダムスペクトル測度であり、性質

$$\begin{aligned} db(\lambda) &= db^*(-\lambda) \\ \langle db(\lambda) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\langle db(\lambda) db^*(\lambda') \rangle = |F(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'$$

をもつ。但し、 $|F(\lambda)|^2$ は、不規則表面のパワースペクトルである。 $f(x)$ のスペクトル表現に対応して、インコヒーレント波が平面波に分解できるものと仮定し、

$$\psi_s(z, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x + i\sqrt{k^2 - \lambda^2} z} d\Phi(\lambda) \quad (1.54)$$

と書く。インコヒーレント波は、 z 方向へ伝搬する部分波と表面波の和であるから、平方根の分岐は、

$$\text{Im}(\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \geq 0 \quad (1.55)$$

でなければならぬ。

以上の仮定により、求めるべき量は A_0 と $d\Phi(\lambda)$ となった。(1.51) と (1.54) を (1.50) へ代入すれば、十分条件として

$$d\Phi(\lambda + K_0) = -iK_z [2 + A_0] db(\lambda) \quad (1.56)$$

が得られる。従って、(1.54) より $\psi_s(z, x)$ は次式となる。

$$\psi_s(z, x) = -iK_z [2 + A_0] e^{iK_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x + i\sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} z} db(\lambda) \quad (1.57)$$

(1.57)(1.51)(1.52) を (1.48) へ代入し、(1.53) を用いれば、 A_0 が求まる。

$$A_0 = -2 \frac{Z_s}{1 + Z_s} \quad (1.58)$$

$$Z_s = K_z \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (1.59)$$

(1.57) ~ (1.59) において、 $Z_s = 0$ ($A_0 = 0$) とおけば、コヒーレント波(1.51) は摂動の零次解と一致し、また (1.57) は一次摂動解と一致する。次に (1.58) を

$$A_0 \simeq -2Z_s \quad (1.60)$$

と近似すれば、二次の摂動解が与えるコヒーレント反射振幅

$$-(1 + A_0) \simeq -1 + 2Z_s = -1 + 2K_z \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (1.61)$$

が得られる。このことより、 σ^2 オーダーの微小量である Z_s は、二次摂動の効果、すなわち、二重散乱の効果を表していることが分かる。(1.58) は分子と分母に、この Z_s をもつので、 A_0 は無限回散乱をも含んだ多重散乱効果を含むことになる。この事実は、後の 2.6 節において別の方法により明らかにする。また、(1.57) は、このような A_0 を含むので、多重散乱効果を含んだ解となっている。

同様の方法で、ノイマン条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (df/dx)^2}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{df}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad (z = f(x)) \quad (1.62)$$

の場合も解析される。このとき、平面 ($z = 0$) 上の近似境界条件として、

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{df}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.63)$$

が用いられる。この境界条件の場合には、二次摂動解が与えるコヒーレント散乱振幅は水平入射のとき発散するが、Bass-Fuksの方法では発散することなく有限である。しかし、インコヒーレント散乱に関しては、一次摂動解と全く同じ欠点をもつ。すなわち、Rayleigh波数をもつ部分波の振幅が発散するため、散乱波の分散や空間相関々数が発散する。

このような欠点のため、Bass-Fuksのテキストの記述は、論理的一貫性を欠くものとなっている。すなわち、コヒーレント散乱に関しては、無限に広い不規則表面による散乱を定式化するのに対し、インコヒーレント散乱に関しては、有限の広さをもつ不規則表面（及び不規則境界面）に限定し、散乱断面積を導出するにとどまっている。このときインコヒーレント散乱波はグリーンの定理を用いて導出される。

H. 不規則表面の統計モデル

散乱波の統計的性質を理論的に評価するためには、不規則表面の統計的性質を与える必要がある。表面の統計モデルとしては、ガウス分布をもつ一様確率場が共通して用いられている。

地表面に関しては、表面の相関関数 $C_f(\mathbf{r})$ として指数型

$$C_f(\mathbf{r}) = \sigma^2 \exp(-|\mathbf{r}|/\kappa), \quad \mathbf{r} = (x, y) \quad (1.64)$$

及びガウス型

$$C_f(\mathbf{r}) = \sigma^2 \exp(-\mathbf{r}^2/\kappa^2) \quad (1.65)$$

が仮定されることが多い。ここで、 σ は不規則表面の粗さ、 κ は相関距離である。月の表面では、ガウス型よりも指数型に近く、逆にアスファルト路面ではガウス型に近いとの報告がある。しかし、現実の地表面は極めて複雑であるので、どの様な相関関数のモデルを用いても適切に表現することは困難であるとの指摘もある。

不規則海面のパワースペクトル $|F(k_x, k_y)|^2$ としては、Phillips spectrum

$$\begin{aligned} |F(k_x, k_y)|^2 &= 6.6 \times 10^{-3} (k_x^2 + k_y^2)^{-2}, & k_x^2 + k_y^2 > g^2/U^4 \\ &= 0, & k_x^2 + k_y^2 < g^2/U^4 \end{aligned} \quad (1.66)$$

及び Neumann spectrum

$$|F(k_x, k_y)|^2 = 8 \times 10^{-3} (k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{5}{4}} \exp\left(-\frac{19.6}{kU^2}\right), \quad (1.67)$$

がよく用いられる。ここで、 $|F|^2$ の次元は (m^4) であり、 g は重力加速度

(9.81 m/sec^2), U は平均風速 (m/sec), k は海面の重力波の波数 (m^{-1}) で, 角周波数 ω_0 と

$$\omega_0^2 = g k, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (1.68)$$

の関係にある。一般に, 海面状態は, 風の吹く時間と範囲, 潮流などに依存する。しかし, 十分長い時間, 十分広い範囲に風が吹き続けたとすれば, 海面重力波の発達に飽和状態に達することが知られ, この飽和状態におけるパワースペクトルが (1.66)(1.67) で記述されると考えられている。

尚, ガウス形スペクトル (1.65) を除いて, 他のパワースペクトルでは, 不規則表面の勾配が発散する。このため, 表面上での法線微分が定義できないことを指摘しておきたい。

第二章 不規則表面による波動散乱の確率理論

2.1 ま え が き

本章では、新しい確率理論により一次元不規則表面によるスカラー波の散乱を解析する。新しい確率理論は、Rice の摂動法やキルヒホッフ近似とは基本的な考え方に於いて異なる反面、回折格子の理論と類似点が多い。回折格子に平面波が入射するとき、波動関数はよく知られた Floquet の形〔たとえば、(1.21) 〕をもち、格子と同じ周期をもつ未知の周期関数と指数関数の積に書ける。未知の周期関数はフーリエ級数で表現できるので、問題は結局、回折格子面上の境界条件によりフーリエ係数を決定することに帰着する。

ここで述べる確率理論は、この様な回折理論の確率過程版であり、表面境界の周期性に代って、不規則表面の確率的一様性とエルゴード性を仮定する。無限に広い不規則表面が強義の定常確率過程（一様確率場）であれば、平面波入射に対する波動解は未知の一様確率場と指数関数の積に書けることを次節で示す。この様な波動解の形は、Floquet の形のアナロジーであり、確率的に一様な不規則表面による波動散乱へ一般的に適用できるものである。

波動解における指数関数は入射平面波により一意的に定まるので、問題は不規則表面上の境界条件を解いて、未知の一様確率場を決定することに帰着する。回折格子の場合とは異なりフーリエ級数は一様確率場を表現するには適さず、摂動法では前章 1.3 E で述べた様に Wood の異常回折と関係して発散の問題がある。そこで、2.3 節では、ガウス確率過程の非線形理論（ウィナー展開）を用いて未知の一様確率場及び不規則表面を表現する。〔ウィナー展開については、付録 A を参照されたい。〕不規則表面が複素ガウスランダム測度により導かれるガウス確率過程であると仮定し、未知の一様確率場を複素ガウスランダム測度に関係した直交確率汎関数に展開する。その結果、境界条件は、この様な汎関数展開の係数に関する関数方程式に変換される。この関数方程式は、表面の粗さが小さい場合、よい近似で解くことができる。

2.5 節では、展開係数の近似解をもとに散乱の統計的性質を計算する。不規則表面が有理型スペクトルをもつ場合、光学定理とコヒーレント散乱振幅、インコヒーレント散乱の角度分布、表面波電力の流れを計算し、結果を図示している。

2.6 節は、ダイアグラム法によりコヒーレント反射振幅を導出し、その結果

との比較により，ウィナー展開による近似解がどのような多重散乱効果を含むかを検討する。

2.7 節は，本章のまとめである。回折理論と確率論を用いる本章の解析法とを比較し，類似点と相異点を表にまとめる。同時に解析上の問題点をも指摘する。

2.2 散乱波の形

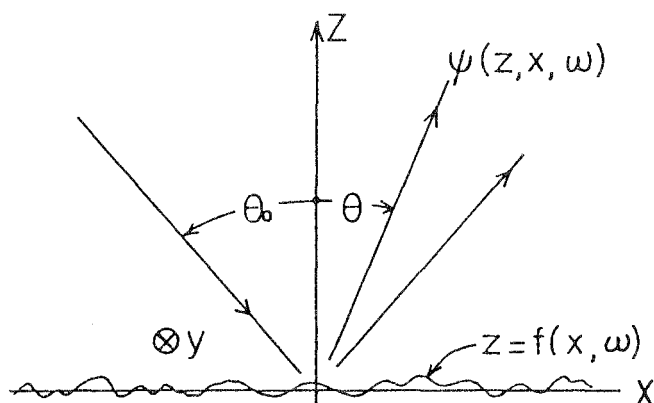


図 2.1 不規則表面による波動散乱（入射角 θ_0 と散乱角 θ は z 軸に関して互いに逆方向に測る）

無限の不規則表面によるスカラー平面波の散乱を考える（図 2.1）。人工の回折格子とは異って，一次元の不規則表面は自然界に実在しない。同様に，無限の不規則表面も実在しないが，このようなモデルを取り上げるのは解析方法の本質が見やすいためであり，有限の表面の場合にある端点の効果がなくなるので不規則性の効果が純粹に表れるためでもある。

本論文では，不規則表面が x 軸上の強定常確率過程であると考える。確率過程とは，確率が定義された関数 $f(x)$ の集合（アンサンブル）であるので，その要素である個々の関数に目印 ω を付け，不規則表面を表す式を，

$$z = f(x, \omega), \quad (-\infty \leq x \leq \infty) \quad (2.1)$$

と書く。確率論では， ω を見本点（sample point）といい，見本点全体からなる集合 Ω を見本空間（sample space）という。 ω を固定するとき，(2.1) は 1 つの実関数を表すので，これを見本過程または見本関数という。逆に x を固定するとき，(2.1) 右辺は 1 つの確率変数である（図 A 2 参照）。

強定常過程は，その確率分布が移動不変であるので，(A 6 0) の様に，

$$z = f(x, \omega) = f(0, T^X \omega) = f(T^X \omega) \quad (2.2)$$

と書くことができる。ここで、 T^X は見本空間 Ω 内の保測変換であり、1パラメータ群の性質

$$\begin{aligned} T^0 &= 1 \text{ (恒等式)}, \\ T^a T^b &= T^{a+b}, \quad (-\infty \leq a, b \leq \infty) \end{aligned} \quad (2.3)$$

をもつ。以下では、見本空間 Ω 上の平均(アンサンブル平均)を記号 $\langle \rangle$ で表し、

$$\langle f(T^X \omega) \rangle = 0, \quad \langle f^2(T^X \omega) \rangle = \sigma^2 \quad (2.4)$$

とする。第1式は不規則表面の平均値が x 軸と一致することを表し、第2式の σ は不規則表面の凹凸の実効値で長さの次元をもつ。

散乱波は不規則表面の形状、つまり見本関数 $f(T^X \omega)$ に依存して定まるので、波動関数を $\psi(z, x, \omega)$ のように ω を明示して書くことにする。単色波の時間依存性を $\exp(-i\omega_0 t)$ (ω_0 :角周波数)とすると、 $z > f(T^X \omega)$ である自由空間において、 $\psi(z, x, \omega)$ はヘルムホルツの方程式

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(z, x, \omega) = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

を満たす。ここで、 k は波数、 \mathbf{e}_x と \mathbf{e}_z はそれぞれ x 方向、 z 方向を示す単位ベクトルである。さらに、不規則表面上の境界条件として、ディリクレ条件

$$\psi(z, x, \omega) = 0 \quad ; \quad z = f(T^X \omega) \quad (2.6)$$

を仮定する。不規則表面が y 方向に一様であるとする、 ψ はTE波の電界(の y 成分)であり、(2.6)は完全導体の不規則表面における境界条件であると解釈できる。本章では、不規則表面の粗さが波長に比較して十分小さい場合($k\sigma \ll 2\pi$)を考えるので、(2.6)を $z=0$ でテイラー展開し、高次項を無視して得られる近似式

$$\psi(0, x, \omega) + f(T^X \omega) \left. \frac{\partial \psi(z, x, \omega)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.7)$$

をランダム境界条件のモデルとする。(2.7)は、直線($z=0$)上でのリアクタンス境界条件であり、実効境界条件(effective boundary condition)とよばれることがある。この特徴は、1次の摂動項のみを含むので、計算結果に現われる多重散乱効果が見やすいことである。

波動方程式 (2.5) 及び境界条件 (2.7) を満たす波動関数を求めれば、問題が解けたことになるが、具体的な計算に立入る前に波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ の可能な形を定めることにしよう。(2.2)により、 $f(T^x \omega)$ は x と ω の移動

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + a \\ \omega &\rightarrow T^{-a} \omega \end{aligned} \quad \} \quad (2.8)$$

に関して不変である。この事実に着目して、移動変換の作用素 D を次式で定義する。

$$D^a \psi(z, x, \omega) = \psi(z, x + a, T^{-a} \omega), \quad -\infty \leq a \leq \infty \quad (2.9)$$

この定義と (2.3) により、移動変換の作用素 D^a は群の性質

$$D^0 = 1 \text{ (恒等式)}, \quad D^a D^b = D^{a+b}, \quad (-\infty \leq a, b \leq \infty) \quad (2.10)$$

をもつ。また、 D^a は、 ∇^2 と可換であり、 $f(T^x \omega)$ を不変にするので、 $\psi(z, x, \omega)$ が (2.5) (2.7) を満たせば、 $D^a \psi(z, x, \omega)$ もこれらの方程式を満たす。そこで、以下では、

$$D^a \psi(z, x, \omega) = C(a, \omega) \psi(z, x, \omega) \quad (2.11)$$

を満たす場合を考え、 $\psi(z, x, \omega)$ をランダム固有関数、 $C(a, \omega)$ をランダム固有値とよぶことにする。(2.11)の両辺に D^b を作用し、(2.10) (2.9) を用いれば、 $C(a, \omega)$ は次式を満たす。

$$C(0, \omega) = 1, \quad C(a+b, \omega) = C(a, \omega) C(b, T^{-a} \omega) \quad (2.12)$$

小倉⁽⁸²⁾⁻⁽⁸⁴⁾は、ランダム媒質中の波動伝搬理論において、このような $C(a, \omega)$ を一般的に研究し、ある強定常過程 $\alpha(T^a \omega)$ により、

$$C(a, \omega) = \exp \left\{ \int_0^a \alpha(T^x \omega) dx \right\} \quad (2.13)$$

と表現できることを導いた。しかし、不規則表面による波動散乱の問題では、 $C(a, \omega)$ は ω に依存しない確定値関数となる。この事実を示すため、

$\psi(z, x, \omega)$ は入射波 $\psi_i(z, x)$ と散乱波 $\psi_s(z, x, \omega)$ の和

$$\psi(z, x, \omega) = \psi_i(z, x) + \psi_s(z, x, \omega) \quad (2.14)$$

であると仮定し、さらに、 ψ_i と ψ_s は個別に (2.11) を満たすものとする。

$$D^a \psi_i(z, x) = C(a, \omega) \psi_i(z, x) \quad (2.15a)$$

$$D^a \psi_s(z, x, \omega) = C(a, \omega) \psi_s(z, x, \omega) \quad (2.15b)$$

入射波 $\psi_i(z, x)$ は ω を含まないから (2.15a) より $C(a, \omega)$ も ω を含まないことになる。そこで、 $C(a, \omega)$ を $C(a)$ と書けば、(2.12) より

$$C(0) = 1, \quad C(a+b) = C(a) C(b)$$

となり,

$$C(a) = \exp(iK_0 a) \quad (2.16)$$

と書ける。ここで K_0 は任意の複素数である。

(2.9) と (2.14) (2.15) (2.16) により, 関係式

$$\begin{aligned} \phi(z, x+a, T^{-a}\omega) &= D^a \phi(z, x, \omega) \\ &= \exp(iK_0 a) [\phi_i(z, x) + \phi_s(z, x, \omega)] \end{aligned}$$

が得られる。ここで, 先ず $x=0$ と書き, 次に a を x と書換え, ω を $T^x \omega$ と置換えると

$$\begin{aligned} \phi(z, x, \omega) &= e^{iK_0 x} [U_i(z) + U_s(z, T^x \omega)] \\ U_i(z) &= \phi_i(z, 0) \\ U_s(z, T^x \omega) &= \phi_s(z, 0, T^x \omega) \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。さらに, $U_i(z)$ の関数形は, 入射波 $\phi_i(z, x)$ が (2.5) を満たすので,

$$U_i(z) = \exp(-iK_z z), \quad K_z = \sqrt{k^2 - K_0^2}$$

でなければならず, 結局, 入射波は平面波であることがわかる。

$$\phi_i(z, x) = e^{i(K_0 x - K_z z)} \quad (2.18)$$

但し, (2.18) が物理的に入射平面波であるためには, K_0 は実数であり, K_z は正の数である必要がある。図 2.1 の入射角 θ_0 により, これらは

$$K_0 = k \sin \theta_0, \quad K_z = k \cos \theta_0 = \sqrt{k^2 - K_0^2} > 0 \quad (2.19)$$

と書かれる。

以上により, 波動関数の可能な形は

$$\phi(z, x, \omega) = e^{iK_0 x} [e^{-iK_z z} + U_s(z, T^x \omega)] \quad (2.20)$$

であることがわかる。ここで, $U_s(z, T^x \omega)$ は, 保測変換 T^x により記述されるから, x に関して強定常過程 (一様確率場) である。(2.20) が, 周期的回折格子における Floquet の形

$$\phi(z, x) = e^{iK_0 x} [e^{-iK_z z} + U_s(z, x)] \quad (2.21)$$

に類似していることに注目されたい。(2.21) では, 格子の周期性を反映して $U_s(z, x)$ は x の周期関数であるが, (2.20) では不規則表面が強定常過程であるので, $U_s(z, T^x \omega)$ が x の強定常過程となっている訳である。

ここでは、(2.11)及び(2.15)の仮定の下で、入射波が平面波であり、散乱波が指数関数と強定常過程の積であることを導いた。他の入射モード(球面波、ビーム波)に対する解の形については後に述べる。

(2.20)の波動関数の形は、筆者らの研究により始めて見いだされたものである。(2.20)から導かれる一つの結論は、コヒーレント反射波(反射波のアンサンブル平均)は、鏡面反射波のみを含むことである。実際、 U_S は x 方向に強定常過程であるから、その平均値 $\langle U_S(z, T^x \omega) \rangle$ は x に依存せず z のみの関数である。そこで、これを

$$U_C(z) = \langle U_S(z, T^x \omega) \rangle \quad (2.22)$$

と書くと、コヒーレント波は

$$\langle \phi(z, x, \omega) \rangle = e^{iK_0 x} [e^{-iK_z z} + U_C(z)] \quad (2.23)$$

となる。これが波動方程式(2.5)を満たすこと、及び $U_C(z)$ が外向きの反射波であることから、

$$U_C(z) = \text{Const.} \cdot e^{iK_z z} \quad (2.24)$$

となる。(2.24)は、コヒーレント反射波が鏡面反射成分のみをもつことを示している。

同様に、 U_S が強義の定常過程であるので、 U_S の確率分布は x の移動に依存せず z のみに依存する。従って U_S の任意次数の統計モーメントは、もし存在すれば、 z のみの関数となる。

次に計算結果の検討に便利な性質を述べたい。(2.4)のように $f(x, \omega)$ の平均値が零であり、かつ、 $f(x, \omega)$ と $\{-f(x, \omega)\}$ とは同じ確率分布に従うものとする*。このとき、確率の意味では、 $f(x, \omega)$ と $\{-f(x, \omega)\}$ とは区別できないので、 $\phi(z, x, \omega)$ の統計的性質は、反転 $f(x, \omega) \rightarrow \{-f(x, \omega)\}$ に関して不変でなければならない。この結果、波動関数のあらゆる統計量には σ の偶数巾のみが表れ、 σ の奇数巾は表れない。この性質は、計算結果の検討に便利である。

上では、平面波入射を考えた。次に平面波以外の入射モードの場合を考えよう。ビーム波や球面波などの入射モードはスペクトル関数 $\Phi(K_0)$ を重みとする平面波の和

*) たとえば、 $f(x, \omega)$ が平均値零をもつ強定常ガウス過程であれば、この性質をもつ。

$$\phi_i(z, x) = \int e^{i(K_0 x - \sqrt{k^2 - K_0^2} z)} \Phi(K_0) dK_0$$

に分解できるから、各部分波に対する解(2.20)を重ね合わせることににより、波動関数は、

$$\phi(z, x, \omega) = \int e^{iK_0 x} \left[e^{-i\sqrt{k^2 - K_0^2} z} + U_S(z, T^x \omega | K_0) \right] \Phi(K_0) dK_0 \quad (2.25)$$

と書ける。ここで、(2.20)の U_S は K_0 に依存するので $U_S(z, T^x \omega | K_0)$ と書いた。平面波以外の入射波に対しては、(2.25)の $\phi(z, x, \omega)$ は x に関する非定常確率過程である。(2.25)の様に、非定常過程が強定常過程 U_S の線形結合として書かれることは、確率過程の表現論において興味深いことである。この様な非定常過程の表現方法は、筆者等が以前に開発したもので、一様ランダム媒質中の波動関数の表現に応用した⁽⁸⁵⁾⁻⁽⁸⁷⁾。

(2.25)を実際の計算に応用するためには、逆変換の公式が必要となる。逆変換は、移動作用素 D^a に関するフーリエ積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iK_0' a} D^a \phi(z, x, \omega) da = e^{iK_0' x} \left[e^{-i\sqrt{k^2 - K_0'^2} z} + U_S(z, T^x \omega | K_0') \right], \quad (2.26)$$

により与えられる。これは、 $U_S(z, T^x \omega | K_0')$ が D^a 不変であること、及び δ 関数の積分公式を用いれば、容易に証明できる。

2.3 波動関数の表現

不規則表面の分散 σ^2 が小さい場合を考えるので、(2.20)を次の形に書き直す。

$$\phi(z, x, \omega) = e^{iK_0 x} \left[-e^{-iK_z \cdot z} + e^{iK_z z} + U(z, T^x \omega) \right] \quad (2.27)$$

$$U(z, T^x \omega) = -e^{iK_z \cdot z} + U_S(z, T^x \omega) \quad (2.28)$$

(2.27)右辺括弧内の第一項は入射平面波、第二項は分散 σ^2 が零の平坦面($z=0$)からの反射波、第三項は求めるべき散乱波に対応する。以下では、(2.5)と(2.7)を解いて強定常過程 $U(z, T^x \omega)$ を求めるが、その前に注意すべき考え方を述べる。

ランダム関数 $U(z, T^x \omega)$ の計算・表現方法には二つの考え方がある。通常の考え方は、 ω を固定し U を座標 (x, z) の関数(見本関数)と見るもので、Rice⁽²⁵⁾の摂動展開やMarsh⁽³¹⁾の逐次近似法の背景となっている。この考えを

用いられれば、座標 (x, z) の関数としては見やすい形でランダム関数が表現できるが、その反面、得られた表現式から平均値・分散などの統計量を計算するには不便である。そこで、以下では第二の考え方をを用いる。

これは、座標 (x, z) を固定し $U(z, T^x \omega)$ を ω の関数、すなわちランダム変数と見るもので、確率論でよく用いられる考え方である。確率変数の直交性（無相関）の概念をもとにして、通常の摂動展開・逐次近似による展開とは違った直交展開を考えることができる。これは展開の各項が、確率平均の意味で直交（無相関）するもので、平均値・分散・相関々数の計算に便利である。以下ではガウス過程の汎関数に対するこの様な直交展開（ウィナー展開）を用いる。ウィナー展開を用いると多重散乱を含む波動関数が簡単な計算により得られる利点もある。

具体的に $U(z, T^x \omega)$ を計算するため、 $f(T^x \omega)$ は λ 軸上の複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda, \omega)$ により生成された実のガウス過程で、ウィナー積分〔(A115) 参照〕

$$f(T^x \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (2.29)$$

$$F(\lambda) = F^*(-\lambda) \quad (2.30)$$

で記述されるものとする。ここで、 $*$ は複素共役を示す記号であり、複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda, \omega)$ は、性質

$$dB(\lambda, \omega) = dB^*(-\lambda, \omega) \quad (2.31)$$

$$\langle dB(\lambda, \omega) \rangle = 0, \quad \langle dB(\lambda_1, \omega) dB^*(\lambda_2, \omega) \rangle = \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.32)$$

をもつ複素ガウスランダム変数である。但し、 δ はディラックのデルタ関数であり、 $\delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ は、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき微小長さ $d\lambda_2$ に等しく、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき零に等しいものとする。（2.30）は（2.29）右辺が実となる条件である。（2.29）～（2.32）により、 $f(T^x \omega)$ の相関関数 C_f は、

$$C_f(a) = \langle f(T^{x+a} \omega) f(T^x \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.33)$$

となる。従って、Wiener-Khinchin の定理により、 $|F(\lambda)|^2$ は $f(T^x \omega)$ のパワースペクトルである。また、（2.4）により、 $C_f(0) = \sigma^2$ であるから、 $F(\lambda)$ は σ のオーダーの微小量である。後にエルゴード定理を用いるので、パワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ は、連続関数であると仮定する。確率過程論でよく

知られている様に，ガウス過程のパワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ が δ 関数成分をもたなければ， $f(T^X \omega)$ はエルゴード性をもつばかりではなく， $f(T^X \omega)$ の任意の定常汎関数もエルゴード性をもつ⁽⁸⁸⁾⁽⁸⁹⁾。従って $f(T^X \omega)$ の任意次数のモーメントは，アンサンブル平均によらず空間平均により得ることができ， $f(T^X \omega)$ の定常確率汎関数である $U(z, T^X \omega)$ の任意次数のモーメントも， z を固定すれば， x に関する空間平均により得ることができる。この様なエルゴード性は，後の 2.5 B 節で光学定理の導出に用いる。

散乱波は，不規則表面の形状に依存して定まるので，波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ は $f(T^X \omega)$ の汎関数である。ところが， $f(T^X \omega)$ は (2.2.9) により $dB(\lambda, \omega)$ の汎関数であるから (2.2.7) の強定常過程 $U(z, T^X \omega)$ を $dB(\lambda, \omega)$ の確率汎関数と考える。このとき，固定した z に対して $U(z, T^X \omega)$ はウィナー展開 (A1.2.3) を用いて，〔以下では， $dB(\lambda, \omega)$ を $dB(\lambda)$ と略記する。〕

$$U(z, T^X \omega) = a_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \quad (2.34)$$

$$\times h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)]$$

の様に表現できる。ここで，(A1.2.3) の $F_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を $a_n(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と書いた。 $a_n(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は変数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に関して対称な関数である。複素ウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)]$ は展開 (2.3.4) の直交ベースであり，(A1.1.1)～(A1.1.4) の性質をもつ。ここで注意すべきことは， $h^{(n)}$ の直交性 (A1.1.4) により (2.3.4) 右辺の各項はランダム変数として相互に直交する（無相関である）ことである。この直交性により U の平均値と分散は，

$$\langle U(z, T^X \omega) \rangle = a_0(z) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \langle |U(z, T^X \omega)|^2 \rangle &= |a_0(z)|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |a_1(z, \lambda)|^2 d\lambda + 2! \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_2(z, \lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &+ \dots \quad (2.36) \end{aligned}$$

と見やすい形に書ける〔(A1.1.8)，(A1.2.0)参照〕。(2.3.5)により，展開 (2.3.4) の第一項は平均値（コヒーレント部分）を表し，第二項（級数部）がゆらぎ部分（インコヒーレント部分）を示す。(2.3.6) 右辺は，非負の数の和であるから， $U(z, T^X \omega)$ の分散が零であることと全ての係数 a_n が零であることは等価である。この性質は以下の計算にしばしば用いる。

次に、係数 a_n の z 依存性を定めよう。(2.27) の散乱波 $e^{iK_0 x} U$ は波動方程式 (2.5) を満たすから、 U の方程式は、

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2iK_0 \frac{\partial}{\partial x} + (k^2 - K_0^2) \right\} U(z, T^x \omega) = 0 \quad (2.37)$$

となる。この方程式を左辺の分散が零であると解釈すると、左辺のウィナー展開の係数は、上に述べた性質によりウィナー展開の各次数ごとに零でなければならない。そこで (2.37) に (2.34) を代入して、ウィナー展開の各係数を零とすれば、 a_n の方程式

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[k^2 - (K_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 \right] \right\} a_n(z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0, \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

が得られる。散乱波 $e^{iK_0 x} U(z, T^x \omega)$ が z 方向へ伝搬する散乱波と z 方向へ減衰する表面波 (エバネセント波) のみを含むので、 a_n の z 依存性は

$$a_n(z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = e^{ik_z(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (2.39)$$

$$k_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2} \geq 0, \left[k^2 \geq (K_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 \right] \\ = i \sqrt{(K_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 - k^2}, \left[k^2 < (K_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 \right] \quad (2.40)$$

でなければならない。(2.39) を (2.34) に代入すれば、 $U(z, T^x \omega)$ は、

$$U(z, T^x \omega) = A_0 e^{iK_0 z} + \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) e^{i\lambda x + ik_z(\lambda)z} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int A_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)x + ik_z(\lambda_1 + \lambda_2)z} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ + \dots \quad (2.41)$$

と表現される。従って、(2.27) の散乱波部分は、

$$e^{iK_0 x} U(z, T^x \omega) = A_0 e^{iK_0 x + iK_0 z} + \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) e^{i(K_0 + \lambda)x + ik_z(\lambda)z} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int A_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x + ik_z(\lambda_1 + \lambda_2)z} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ + \dots \quad (2.42)$$

と書ける。右辺の第一項は鏡面反射されるコヒーレント散乱波である。第2項は、波数ベクトル $\mathbf{k} = (K_0 + \lambda, k_z(\lambda))$ をもつ平面波 (部分波) の和であり、

ら、左辺全体の統計的性質は x に依存しない。そこで (2.44) を確率方程式と
 考えて、 $x=0$ において解くことにする。この性質は、回折格子の理論と類似
 のものである。すなわち、回折格子では周期性のため、任意の一周期に関して
 方程式（境界条件）を解けばよかった。不規則表面の場合には、不規則性の確
 率的性質が x に依存しないので、任意の一点 x に対して境界条件を解けばよい
 ことになる。

(2.41) を (2.44) へ代入して、(2.44) 左辺のウィナー展開を導こう。
 まず、左辺第三項を計算する。(2.29) と (2.41) により、

$$\begin{aligned} f(\omega) \frac{\partial U(z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) dB(\lambda) \cdot \left[iK_z A_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) k_z(\lambda) dB(\lambda) \right. \\ \left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\lambda_1, \lambda_2) k_z(\lambda_1 + \lambda_2) h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots \right] \end{aligned}$$

である。複素ウィナーエルミット微分式の漸化式 (A 1 1 2) を用いてこの右
 辺を再びウィナー展開すれば、

$$\begin{aligned} f(\omega) \frac{\partial U(z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ = i \int_{-\infty}^{+\infty} k_z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda + i \int_{-\infty}^{+\infty} [K_z A_0 F(\lambda) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} k_z(\lambda + \lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) F^*(\lambda_1) d\lambda_1] dB(\lambda) \\ + i \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} [k_z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F(\lambda_2) + k_z(\lambda_2) A_1(\lambda_2) F(\lambda_1)] \right. \\ \left. + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} k_z(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) F^*(\lambda) d\lambda \right\} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。ここで、第3項内の係数 $\frac{1}{2}$ は、 λ_1 と λ_2 に関して対称にするために出る
 因子である。一方、(2.29) と (2.41) により、(2.44) の最初の二項は

$$\begin{aligned} U(0, \omega) + 2iK_z f(\omega) = A_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(\lambda) + 2iK_z F(\lambda)] dB(\lambda) \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\lambda_1, \lambda_2) h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

と書ける。(2.45) と (2.46) の和をとれば、

$$\begin{aligned}
& U(0, \omega) + 2iK_Z f(\omega) + f(\omega) \left. \frac{\partial U(z, \omega)}{\partial z} \right|_{z=0} \\
&= \left[A_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda \right] \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A_1(\lambda) + i(2+A_0)K_Z F(\lambda) + 2i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda+\lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) F^*(\lambda_1) d\lambda_1 \right] dB(\lambda) \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F(\lambda_2) + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_2) A_1(\lambda_2) F(\lambda_1) \right. \\
&\quad \left. + 3i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) F^*(\lambda_3) d\lambda_3 \right\} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\
&+ \dots \dots \dots \quad (2.47)
\end{aligned}$$

となる。複素ウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}$ の直交性 (A113) を用いて、この分散を計算すれば、

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left| U(0, \omega) + 2iK_Z f(\omega) + f(\omega) \left. \frac{\partial U(z, \omega)}{\partial z} \right|_{z=0} \right|^2 \right\rangle \\
&= \left| A_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda \right|^2 + 1! \int_{-\infty}^{+\infty} \left| A_1(\lambda) + i(2+A_0)K_Z F(\lambda) \right. \\
&\quad \left. + 2i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda+\lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) F^*(\lambda_1) d\lambda_1 \right|^2 d\lambda + 2! \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| A_2(\lambda_1, \lambda_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F(\lambda_2) + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_2) A_1(\lambda_2) F(\lambda_1) \right. \\
&\quad \left. + 3i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) F^*(\lambda_3) d\lambda_3 \right|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\
&+ \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

である。この右辺は、非負の数で和であるから、境界条件 (2.44) が自乗平均の意味で成立するためには、右辺の各項が項別に零でなければならない。右辺の各積分は、絶対値の自乗の積分であるから、被積分関数自体が零でなければならないことになる。従って、

$$A_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda = 0 \quad (2.48)$$

$$A_1(\lambda) + iK_Z(2+A_0)F(\lambda) + 2i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda+\lambda_1)A_2(\lambda, \lambda_1)F^*(\lambda_1) d\lambda_1 = 0 \quad (2.49)$$

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_1)A_1(\lambda_1)F(\lambda_2) + \frac{i}{2} k_Z(\lambda_2)A_1(\lambda_2)F(\lambda_1) \\ + 3i \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)F^*(\lambda_3) d\lambda_3 = 0 \quad (2.50)$$

等々が、同時に成立する必要がある。方程式(2.48)～(2.50)は、 A_0, A_1, A_2, \dots についての無限連立方程式であるので、これらを解くためには、適当な次数 n 以上の係数 A_n を無視する必要がある。もし A_3 以上を無視すれば、(2.50)により A_2 が A_1 の関数として定まる。この A_2 を(2.49)に代入すれば、 A_1 の積分方程式になり、この積分方程式を解いて A_1 を求め、この A_1 をさらに(2.48)に代入すると未知量 A_0 が求められる。この A_0 により、 $A_1(\lambda)$ が決定され、さらに $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ が求まることになる。この様にウィナー展開の係数の方程式では、低次の解から順番に高次の解が決まる摂動法や逐次近似法とは全く異なり、高次の係数から低次の係数が決まる。

(2.4)(2.29)により $F(\lambda)$ が σ のオーダーの微小量であるから、(2.48)～(2.50)により、 $A_1(\lambda)$ は高々 σ のオーダーであり、 A_0 は高々 σ^2 のオーダー、 A_n ($n \geq 2$) は高々 σ^n のオーダーとなる。〔しかし、(2.41)は摂動級数ではないので、 A_n ($n \geq 1$) は正確に σ^n のオーダーではなく、 n より大きいオーダー σ^m ($m \geq n$) の寄与を含むことに注意されたい〕。 σ が十分小さい場合には、この様な理由で、適当な次数以上の係数 A_n を無視することにより連立方程式(2.48)～(2.50)を近似的に解くことができる。以下では、 A_0 と A_1 のみを含む一次近似解を求めることにしよう。しかし、多重散乱を含む解を得るため、まず $n \geq 3$ に対して $A_n = 0$ と置く。

(2.50)で $A_3 = 0$ とすれば、

$$A_2(\lambda_1, \lambda_2) \simeq -\frac{i}{2} k_Z(\lambda_1)A_1(\lambda_1)F(\lambda_2) - \frac{i}{2} k_Z(\lambda_2)A_1(\lambda_2)F(\lambda_1) \quad (2.51)$$

を得る。これを(2.49)に代入して A_2 を消去すれば、

$$\left[1 + k_Z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda+\lambda_1) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right] A_1(\lambda) + iK_Z(2+A_0)F(\lambda) \\ + F(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1+\lambda) k_Z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F^*(\lambda_1) d\lambda_1 = 0 \quad (2.52)$$

となる。この第三項は σ^3 のオーダーであり、 σ^1 のオーダーの第二項に比べて小さいから、これを無視すれば、 $A_1(\lambda)$ の近似解

$$A_1(\lambda) \simeq - \frac{iK_z(2+A_0)F(\lambda)}{1+M(\lambda)}, \quad (2.53)$$

$$M(\lambda) = k_z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_z(\lambda+\lambda') |F(\lambda')|^2 d\lambda' \quad (2.54)$$

が得られる。(2.54) の積分は、任意のパワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ に対しては存在しない。そこで条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |F(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \quad (2.55)$$

を仮定する。これは $f(T^x \omega)$ が自乗平均の意味で 1 回微分可能であるための条件である。

(2.53) を (2.48) に代入して、 A_0 を求めると、

$$A_0 = - \frac{2Z_s}{1+Z_s}, \quad (2.56)$$

$$Z_s = K_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_z(\lambda) |F(\lambda)|^2}{1+M(\lambda)} d\lambda \quad (2.57)$$

となる。(2.43) におけるコヒーレント波の反射係数は、(2.56) により

$$-(1+A_0) = \frac{Z_s-1}{Z_s+1} \quad (2.58)$$

と書けるので、 Z_s を等価表面インピーダンスとよぶことにする。 Z_s の実部（抵抗分）は、インコヒーレント散乱によるコヒーレント反射電力の散逸を表わし、 Z_s の虚部（リアクタンス分）は表面波の存在を示唆するものである。

(2.57) 分母の $M(\lambda)$ を無視すれば、(2.40) により次式となる。

$$Z_s \simeq K_z \int_{k^2 > (K_0+\lambda)^2} \sqrt{k^2 - (K_0+\lambda)^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda + i K_z \int_{k^2 < (K_0+\lambda)^2} \sqrt{(K_0+\lambda)^2 - k^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda$$

不等号は、積分範囲を示すので、 Z_s の抵抗分は表面変動の低域成分により生成され、リアクタンス成分は高域成分によることがわかる。

コヒーレント反射波の振幅が 1 を超えることは物理的にありえないから、不等式

$$|1+A_0|^2 \leq 1 \quad (2.59)$$

が常に成立しなければならない。この不等式が成立するためには、

$$\operatorname{Re}(A_0) \leq 0 \quad (2.60)$$

でなければならない。この様に負の $\operatorname{Re}(A_0)$ はコヒーレント反射波を減少させるが、同時に (2.53) によりインコヒーレント散乱の振幅 $A_1(\lambda)$ をも減少させるように作用する。

(2.54) の $M(\lambda)$ と (2.57) の Z_s は、共に σ^2 のオーダーであるので、二重散乱の効果を表す。(2.53)(2.56) の A_1 と A_0 は、この様な二重散乱の効果を分母にもつので、後の 2.6 節で示すように、いずれも無限回散乱をも含む多重散乱効果を含んでいる。この様な多重散乱解は、通常の摂動法では得られないものである。

(2.53) に於いて、 $A_0 = M(\lambda) = 0$ とおけば、一次摂動解と一致し、[(1.26) と比較されたい]、(2.56) の分母の Z_s を無視すれば、 A_0 は二次の摂動解と一致する。また、(2.53)(2.57) において、 $M(\lambda) = 0$ とすれば、Bass-Fuks の解 (1.56)(1.59) と一致する。このことより、我々の解は、従来解の拡張であることがわかる。

2.5 散乱の統計的性質

前節で計算した近似展開係数 A_0, A_1 を (2.41) に代入すれば、(2.27) により波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ が確率過程として近似的に定まるので、散乱波に関する任意の統計量を平均操作により求めることができる。以下では、コヒーレント散乱振幅、光学定理 (エネルギー保存則)、インコヒーレント散乱の角度分布、表面波の流れなどを計算する。このような散乱特性を具体的に数値的に得るには、不規則表面のパワースペクトルが必要であるので、以下では次の有理型スペクトルを仮定して数値計算を行った。

$$|F(\lambda)|^2 = \frac{2\sigma^2\kappa^3}{\pi(\lambda^2 + \kappa^2)^2} \quad (2.61)$$

(2.33) により、不規則表面の相関々数 C_f は、

$$C_f(a) = \sigma^2 e^{-\kappa|a|} [1 + \kappa|a|] \quad (2.62)$$

である。(2.61) は、条件 (2.55) を満たす。ここで、パラメータ κ は、不規則表面の相関長の逆数である。

A. コヒーレント散乱振幅

(2.54)(2.56)(2.57)(2.61) を用いて、 A_0 を計算した。入射角の関数として A_0 をプロットしたものが、図 2.3 である。(2.57) により、 Z_s は

$K_z = k \cos \theta_0$ に比例するから、 $\theta_0 = \pi/2$ のとき A_0 は零となる。また、図より A_0 の実部は負であるので、(2.60) の要請を満たしている。

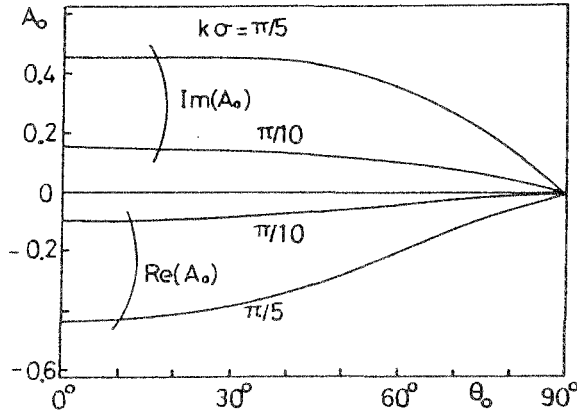


図 2.3 A_0 の入射角 θ_0 依存性 ($\kappa/k=2$)

B. 光学定理

波動散乱問題におけるエネルギーの保存則は、通常、光学定理 (Optical theorem) とよばれる。有限の散乱体の場合、光学定理は前方散乱振幅と全散乱断面積の関係を与える⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾。不規則表面による散乱の場合、光学定理はコヒーレント散乱とインコヒーレント散乱との電力関係を記述するものである。ここでは、強定常過程 $U(z, T^X \omega)$ のエルゴード性をもちいて、光学定理を系統的に導く。

波動方程式 (2.5) の保存則

$$\operatorname{div} [\operatorname{Im}(\psi^* \operatorname{grad} \psi / k)] = 0 \quad (2.63)$$

を図 2.4 の箱状領域で積分し、ガウスの定理により表面積分に書き直せば、

$$\frac{1}{k} \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Im}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} |_{z=z_0}) dx + \frac{1}{k} \int_{S_n} \operatorname{Im}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n}) dz = 0 \quad (2.64)$$

を得る。ここで、 Im は虚部を表わす記号、 S_n は箱の側面であり、 n は、 S_n 上の外向法線である。(2.64) の第一項は長さ 2ℓ に比例するが、第二項は ℓ に無関係である。そこで、両辺を底部の長さ 2ℓ で割り、 $\ell \rightarrow \infty$ の極限をとれば、

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{2\ell k} \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Im}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} |_{z=z_0}) dx = 0 \quad (2.65)$$

が成立する。これは、単位長さあたりに換算したとき、 z 方向への電力の流れがないこと、つまり、不規則表面に損失がないので入射電力は全て散乱波の電力となることを意味している。一方、波動関数

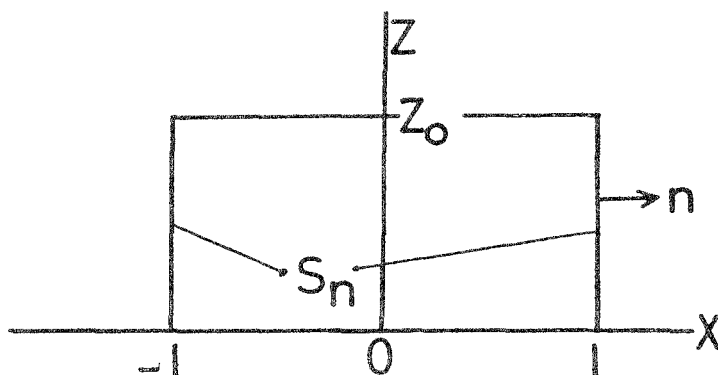


図 2.4 箱状積分領域

(2.27) は指数因子 $\exp(iK_0 x)$ を除いて強定常過程であるから、(2.65) の被積分関数は強定常確率過程である。従って、エルゴード定理により、(2.65) の空間平均を Ω 上の確率平均に置き換えることができる。すなわち、

$$\frac{1}{k} \langle \text{Im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} \rangle = 0 \quad (2.66)$$

これは、不規則表面による散乱問題について一般的に成立するエネルギー保存則である。ここで重要なことは、統計量としての保存則 (2.66) が成立すれば、個別の (見本過程としての) 保存則 (2.65) が逆に成立することである*。

(2.66) の左辺に (2.27) (2.41) を代入して、ウィナー展開の係数 A_0, A_1, A_2, \dots による光学定理を求めよう。(2.66) に (2.27) を代入すれば、

$$\frac{1}{k} \text{Im} \langle \left[-e^{iK_z z_0} + e^{-iK_z z_0 + U^*} \right] \left[iK_z e^{-iK_z z_0} + iK_z e^{iK_z z_0 + \frac{\partial U}{\partial z}} \right] \rangle = 0 \quad (2.67)$$

となる。この左辺は、強定常過程の平均値であるから、 x に依存しない。そこで、 $x = 0$ において以下の計算を進める。(2.67) へ (2.41) を代入すれば、次式となる。

*) これは、次の様な例がありえないことを意味する。

1 w の電力が入射するとき、ある見本表面では 2 w の散乱波があり、別の見本表面では 0 w の散乱波があって、これらを平均すれば散乱波は 1 w であり、統計的には保存則が成立する！。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \text{Im} \langle \{ -e^{+iK_Z z_0 + (1+A_0^*)} e^{-iK_Z z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int A_n^*(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{-ik_Z^*(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) z_0} \\
& \quad \times h^{(n)*} [dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \} \cdot \{ +iK_Z e^{-iK_Z z_0 + iK_Z (1+A_0^*)} e^{+iK_Z z_0} \\
& \quad + i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int k_Z (\lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_n) A_n (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n) e^{+ik_Z (\lambda'_1 + \dots + \lambda'_n) z_0} \\
& \quad \times h^{(n)} [dB(\lambda'_1), dB(\lambda'_2), \dots, dB(\lambda'_n)] \} \rangle = 0 \quad (2.68)
\end{aligned}$$

(A114)により次数の異なるウィナーエルミット多項式は直交するから、各次数ごとに平均値を計算すればよい。0次、1次、2次についての計算を以下に示す。

(0次)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \text{Im} \{ \{ -e^{+iK_Z z_0 + (1+A_0^*)} e^{-iK_Z z_0} \} \{ +iK_Z e^{-iK_Z z_0 + iK_Z (1+A_0^*)} e^{+iK_Z z_0} \} \} \\
& = -\frac{K_Z}{k} + \frac{K_Z}{k} |1+A_0|^2 \quad (2.69)
\end{aligned}$$

(1次)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \text{Im} \langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(\lambda) e^{-ik_Z^*(\lambda) z_0} dB^*(\lambda) \right) \left(i \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda') k_Z(\lambda') e^{+ik_Z(\lambda') z_0} dB(\lambda') \right) \rangle \\
& = \frac{1}{k} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(\lambda) A_1(\lambda') k_Z(\lambda') e^{i(k_Z(\lambda') - k_Z^*(\lambda)) z_0} \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \\
& = \frac{1}{k} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) |A_1(\lambda)|^2 e^{-2 \text{Im}[k_Z(\lambda)] z_0} d\lambda \\
& = \frac{1}{k} \int_{(K_0 + \lambda)^2 < k^2} k_Z(\lambda) |A_1(\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.70)
\end{aligned}$$

ここで、 $k_Z(\lambda)$ が実である条件(2.40)を用いた。〔不等号は積分範囲〕

(2次)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \text{Im} \langle \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} A_2^*(\lambda_1, \lambda_2) e^{-ik_Z^*(\lambda_1 + \lambda_2) z_0} h^{(2)*} [dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \right) \\
& \quad \times \left(i \iint_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda'_1 + \lambda'_2) A_2(\lambda'_1, \lambda'_2) e^{ik_Z(\lambda'_1 + \lambda'_2) z_0} h^{(2)} [dB(\lambda'_1), dB(\lambda'_2)] \right) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2!}{k} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2^*(\lambda_1, \lambda_2) A_2(\lambda'_1, \lambda'_2) k_Z(\lambda'_1 + \lambda'_2) e^{i[k_Z(\lambda'_1 + \lambda'_2) - k_Z^*(\lambda_1 + \lambda_2)]z_0} \\
&\quad \times \delta(\lambda_1 - \lambda'_1) \delta(\lambda_2 - \lambda'_2) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda'_1 d\lambda'_2 \\
&= \frac{2!}{k} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1 + \lambda_2) |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 e^{-2 \operatorname{Im}[k_Z(\lambda_1 + \lambda_2)]z_0} d\lambda_1 d\lambda_2 \\
&= \frac{2!}{k} \iint k_Z(\lambda_1 + \lambda_2) |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.71) \\
&\quad (K_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 < k^2
\end{aligned}$$

ここで、 $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ が λ_1 と λ_2 に関して対称であることを用いた。

同様の計算により、(2.68) は結局、

$$\begin{aligned}
\frac{K_Z}{k} &= \frac{K_Z}{k} |1 + A_0|^2 \\
&+ \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int k_Z(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \\
&\quad (K_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 < k^2
\end{aligned} \quad (2.72)$$

となる。これは、展開係数 A_0, A_1, \dots で書かれた光学定理である。左辺は単位表面長に入射する電力であり、一方、右辺第一項はコヒーレント反射電力、級数部はインコヒーレント散乱電力である。右辺全体は全散乱電力であり、これが左辺の入射電力と等しい。級数部の各積分は、(2.40) より、 z 方向へ伝搬する部分散乱波の電力の和であり、表面波成分の影響を含まない。

(2.72) の右辺各項は全て非負であるから、不等式

$$\operatorname{Re}(A_0) \leq 0 \quad (2.73)$$

が成立しなければならない。これは、(2.59) において物理的考察により予想したものであるが、光学定理によれば、コヒーレント反射電力の減少がインコヒーレント電力の増加となるものと解釈できる。

光学定理(2.72) は近似を用いずに導いた厳密式であるので、前節で計算した近似解の精度の検討に用いることができる。

図 2.5 は、有理型スペクトル(2.61) に対して光学定理の関係を計算したものである。ここで、コヒーレント反射電力は(2.57)(2.58) により計算し、インコヒーレント散乱電力は(2.53) の $A_1(\lambda)$ のみで評価した。表面の粗さパラメータ $k\sigma$ が増加するとき、コヒーレント反射(図の曲線 a) は減少し、逆にインコヒーレント散乱電力(曲線 b) が増加する。全散乱電力(曲線 c)

プログラムにはバグがあり、

↓ この図は誤り。

は、ほぼ入射電力に等しく、光学定理が近似的に成立することがわかる。しかし、 $k\sigma > 3\pi/16$ では、全散乱電力は入射電力よりも小さくなり、前節の近似解は、もはや光学定理を満たさない。このような領域では、 A_2, A_3 などを含んだ高次の近似解が検討されなければならない。

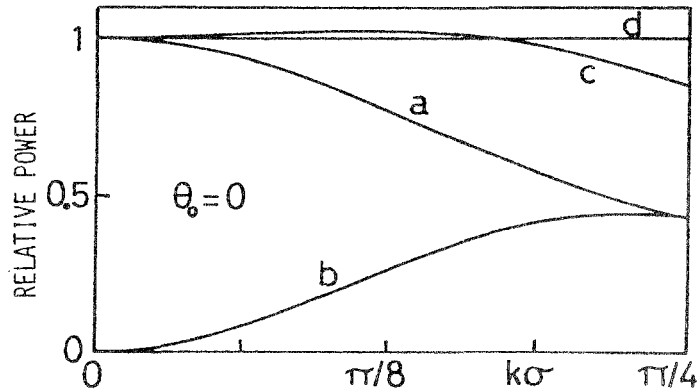


図 2.5 光学定理の表面粗さ依存性 ($\kappa/k=2$)

a: コヒーレント反射電力, b: インコヒーレント散乱電力
c: 全散乱電力 (a と b の和), d: 入射電力

1 次摂動解では、インコヒーレント散乱電力が $k^2 \sigma^2$ に比例して増加するのに対して、図 2.5 では $k^2 \sigma^2$ に正確には比例しない。これは、(2.53) の $A_1(\lambda)$ が多重散乱効果を含むためであり、問題の非線形性の表現とも見ることができる。

C. インコヒーレント散乱の角度分布

散乱波の平均値部分 (コヒーレント反射波) は鏡面反射成分のみをもち、平均値を差引いた変動部分 (インコヒーレント散乱波) が全ての方向への散乱波を含んでいる。入射角を θ_0 とするとき、 θ 方向へ散乱された部分波の電力フラックス (ポインテング電力) の平均値を入射波の電力フラックスで正規化した量をインコヒーレント散乱の角度分布 (angular distribution of incoherent scattering) とよぶこととし、 $S(\theta, \theta_0)$ で表す。

すなわち、 $d\theta$ を微小角とすると、

$$S(\theta, \theta_0) d\theta = \frac{d\theta \text{ 方向に散乱された部分波の平均電力フラックス}}{\text{入射平面波の電力フラックス}} \quad (2.74)$$

である。この定義により、 $S(\theta, \theta_0)$ の次元は (ラジアン) $^{-1}$ となる。これは、単位開口長をもつレンズにより焦点 F_0 に収束されるインコヒーレント散乱電力の平均値に等しい (図 2.6 参照)。図より明らかに、焦点 F_0 で受信される電力は、長さ $(\cos \theta)^{-1}$ をもつ表面部分が散乱する電力の一部である。散乱

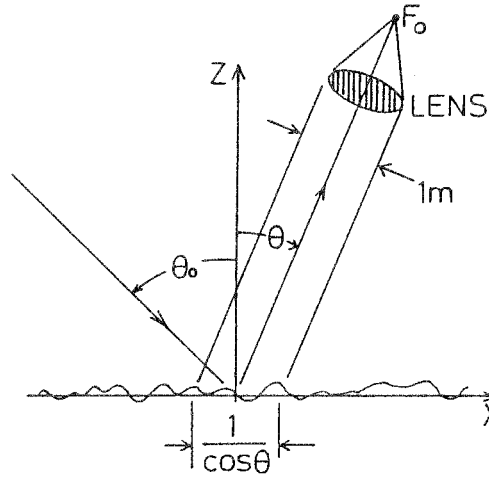


図 2.6 インコヒーレント散乱の角度分布の説明

角 θ が $\pi/2$ に漸近するとき、長さ $(\cos\theta)^{-1}$ は発散するので、 $S(\theta, \theta_0)$ は無限に広い表面からの散乱の場合には合理的な概念である。

さて、(2.72) は単位表面長あたりの関係式であるから、上の定義により、

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(\theta, \theta_0) \cos\theta \, d\theta \quad (2.75)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{k} \int \cdots \int k_z (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 \, d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \\ (K_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 < k^2$$

が成立する。この右辺は λ の積分であるから、角度 θ へ変換するため、

$$\begin{aligned} K_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n &= k \sin\theta \\ k_z (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) &= k \cos\theta \\ d\lambda_1 &= k \cos\theta \, d\theta \end{aligned} \quad (2.76)$$

と置き、図 2.2 の関係を用いれば、

$$S(\theta, \theta_0) = k \cos\theta \left\{ |A_1(\lambda)|^2 + 2! \int_{-\infty}^{+\infty} |A_2(\lambda, \lambda - \lambda_2)|^2 \, d\lambda_2 \cdots \right\}, \quad (2.77)$$

$$\lambda = k \sin\theta - k \sin\theta_0$$

となる。(2.53) を用いて、これを近似的に評価すれば、

$$S(\theta, \theta_0) \simeq \frac{k^3 \cos \theta \cos^2 \theta_0 |2 + A_0|^2 |F(k \sin \theta - k \sin \theta_0)|^2}{|1 + M(k \sin \theta - k \sin \theta_0)|^2} \quad (2.78)$$

である。ここで、 F の変数は、入射角 θ_0 の平面波を散乱角 θ をもつ平面波へ変換するブラッグ・ベクトルである。但し、 θ と θ_0 は z 軸に関して相互に逆方向に測るものとする（図 2.1 参照）。

図 2.7 は、インコヒーレント散乱の角度分布を描いたものである。不規則表面のパワースペクトル（2.61）が原点（ $\lambda=0$ ）で最大となるので、 $S(\theta, \theta_0)$ は鏡面反射方向（ $\theta \simeq \theta_0$ ）で強くなるはずである。しかし、 $|\theta|$ が大きいところでは因子 $\cos \theta$ が効くので、 θ_0 よりも小さい θ で S は最大値をとる。

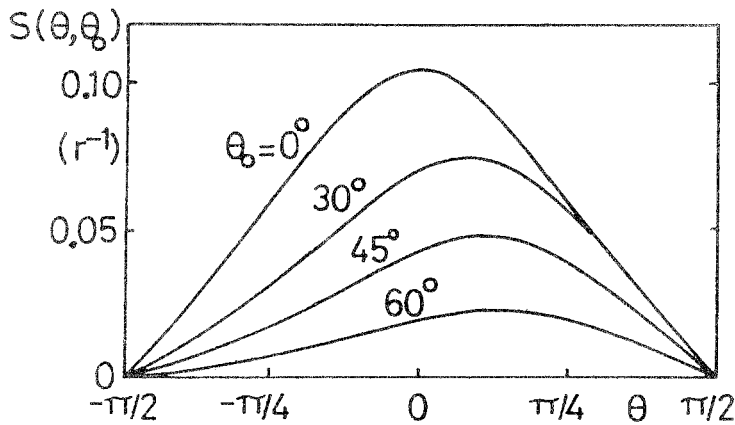


図 2.7 インコヒーレント散乱の角度分布 ($k\sigma = \pi/10, \kappa/k = 2$)
(θ_0 : 入射角, θ : 散乱角)

D 単位面積あたりの散乱断面積（レーダー断面積）*

$S(\theta, \theta_0)$ は長さ $(\cos \theta)^{-1}$ をもつ表面部分からの散乱電力に関する量であり、 $(\text{ラジアン})^{-1}$ の次元をもつ。そこで、これを単位表面長（単位面積）あたりに換算するとともに無次元とした量

$$\sigma^0(\theta | \theta_0) d\theta = 2\pi \frac{\text{単位表面長より } d\theta \text{ 方向へ散乱される部分波の平均電力フラックス}}{\text{入射波の電力フラックス}} \quad (2.79)$$

を定義し、単位長さ（単位面積）あたりの散乱断面積という。等方散乱の場合、すなわち、（2.79）の分子が恒等的に $(1/2\pi)$ に等しい場合、 $\sigma^0(\theta | \theta_0) = 1$

となる。〔ここで、単位長とは凹凸のある表面にそって測った長さではなく、 x 軸の長さである。二次元表面の場合、係数 2π は 4π に、 $d\theta$ は微小立体角 $d\Omega$ に変更する必要がある〕。(2.74) と (2.79) を比較すれば、

$$\sigma^0(\theta|\theta_0) = 2\pi \cos\theta S(\theta, \theta_0) \quad (2.80)$$

であることが容易にわかる。 $S(\theta, \theta_0)$ は、あらゆる散乱角 θ に対して有限であるので、

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\pi/2} \sigma^0(\theta|\theta_0) = 0 \quad (2.81)$$

が成立しなければならない。本論文で求めた解は、この性質を満足するが、一次摂動解の場合には、しばしば (2.81) 右辺は正の数になる。これは、 $S(\theta, \theta_0)$ が $\theta \rightarrow \pm\pi/2$ の極限で発散するためで、物理的に誤った結果である。

(2.80) の関係を用いると、光学定理 (2.72) は

$$\{1 - |1 + A_0|^2\} \cos\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int \sigma^0(\theta|\theta_0) d\theta$$

と書くことができる。これは、コヒーレント散乱電力の減少が、全散乱断面積に等しいことを表す。

(2.78) と (2.80) を用いれば、 $\sigma^0(\theta|\theta_0)$ の近似評価式として、

$$\sigma^0(\theta|\theta_0) \simeq 2\pi k^3 \cos^2\theta \cos^2\theta_0 |2 + A_0|^2 \frac{|F(k\sin\theta - k\sin\theta_0)|^2}{|1 + M(k\sin\theta - k\sin\theta_0)|^2} \quad (2.82)$$

が得られる。容易に分かるように、これは (2.81) を満たす。

E. 表面波電力の流れ

入射平面波は、 z 方向に指数関数的に減衰する表面波を励振する。この表面波の平均電力流を計算しよう。表面波 $\Psi_s(z, x, \omega)$ は、 A_1 のみを用いる近似では、(2.42) により、

$$\Psi_s(z, x, \omega) \simeq e^{iK_0 x} \int_{(K_0 + \lambda)^2 > k^2} A_1(\lambda) e^{i\lambda x} e^{ik_z(\lambda)z} dB(\lambda) \quad (2.83)$$

と書ける。右辺の積分は、 $k_z(\lambda)$ が純虚となる λ 領域上にとられる。位置

*) 筆者の初期の論文⁽⁹⁾では、(2.74) の S を散乱断面積とよんでいる。Peake の論文⁽²³⁾では、 $4\pi s$ を散乱断面積とよんでいる（但し、二次元表面）。これらは、通常の変換 (2.79) とは異なっている。また、Ground echo に関しては、 σ^0 ではなく、散乱係数 $\sigma^0 / \cos\theta$ がよく用いられる⁽³²⁾。

(x, z) における x 方向への表面波の電力フラックスは,

$$p_s(z, T^x \omega) = \text{Im} \left\{ \frac{\psi_s^*(z, x, \omega)}{k} \frac{\partial}{\partial x} \psi_s(z, x, \omega) \right\} \quad (2.84)$$

であるが, これは x に関して強定常確率過程である。(2.83)を用いて, 右辺の平均値を求めると,

$$\langle p_s(z, T^x \omega) \rangle \simeq \frac{1}{k} \int_{(K_0 + \lambda)^2 > k^2} (K_0 + \lambda) |A_1(\lambda)|^2 e^{-2\sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2} \cdot z} d\lambda \quad (2.85)$$

となり, 高さ z の増加とともに表面波の電力フラックスが減少することを示す。そこで, (2.85)を z について積分した量

$$P_s = \int_0^\infty \langle p_s(z, T^x \omega) \rangle dz \simeq \int_{(K_0 + \lambda)^2 > k^2} \frac{(K_0 + \lambda) |A_1(\lambda)|^2}{2k\sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2}} d\lambda \quad (2.86)$$

を定義する。これは, z 軸の正の部分を通過する表面波電力流の平均値である。但し, x 方向への流れを正とする。

(2.53)を(2.86)に代入して, P_s を数値計算した。その結果を図2.8に示す。垂直入射($\theta_0 = 0$)では, 幾何学的対称性により x 方向への流れと $-x$ 方向への流れが等し

いので, 全体として

P_s は零となる。また水平入射($\theta_0 = \pi/2$)では, 表面の単位長に入射する電力が零となるため, P_s は零となる。この結果 $\theta_0 \simeq 45^\circ$ 付近で, 表面波の流れは最大となっている。

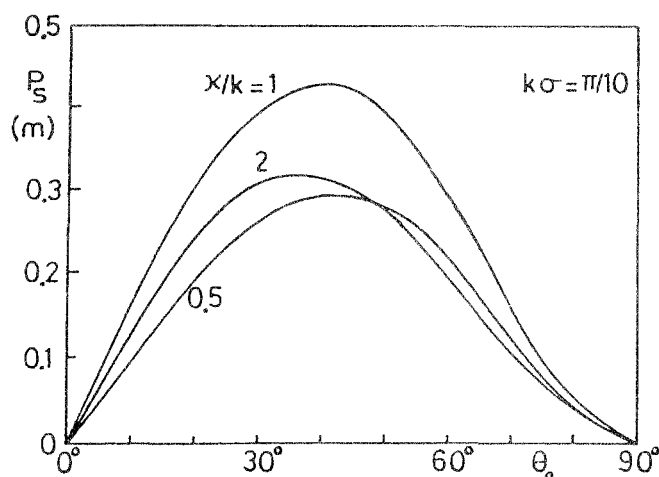


図2.8 表面波電力流の平均値〔 θ_0 :入射角, 縦軸:入射平面波の電力フラックスで正規化した量であるため, 長さの次元をもつ。〕

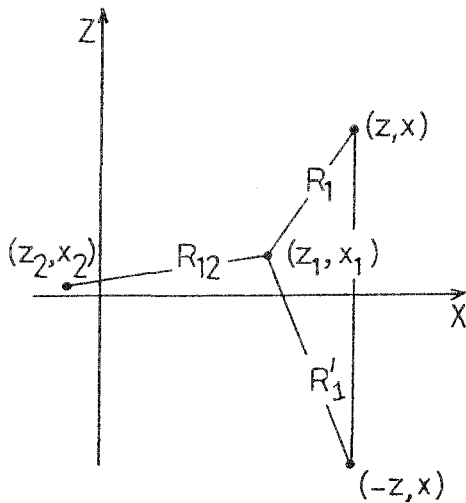
2.6 ダイアグラム法による多重散乱の説明

ウィナー展開の利点は、複素ウィナーエルミット微分式の直交性と漸化式が既知であるので、計算が系統的・組織的に進めうることであり、また多重散乱を含む近似解が容易に得られることである。しかし、ウィナー展開は、確率平均の意味での直交性に基づく展開であるので、得られた結果が、どのような散乱のプロセスによっているかという物理的意味は見にくい。この様な欠点は、波動散乱の論理よりも確率的・統計的性質を優先させる計算法——たとえば、ランダム媒質中の波動伝搬理論におけるFokker-Planck方程式⁽⁹³⁾、モーメント方程式、CPA近似——がもつ共通の欠点である。一方、摂動法のように、波動散乱の論理を優先する計算法では、計算を系統的に進めるには不利であるが、多重散乱の物理的プロセスを素直に表現するので、得られた結果の解釈が容易となる。

そこで、この節では、Freilikher-Fuks のダイアグラムによる摂動級数表示⁽⁹⁵⁾により、コヒーレント散乱波を導出し、これと比較することにより2.4節の近似解がどのような多重散乱を含むかを検討しよう。

(2.7)は平面($z=0$)上での境界条件であるので、鏡像法により平面のグリーン関数 G_0 を作ることができる。すなわち、 R_1 と R_1' を図2.9の距離とすると、第2種ハンケル関数 $H_0^{(2)}$ を用いて

$$G_0(R) = \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(kR_1) - H_0^{(2)}(kR_1') \} \quad (2.87)$$



$$R_1 = \sqrt{(z-z_1)^2 + (x-x_1)^2}$$

$$R_1' = \sqrt{(z+z_1)^2 + (x-x_1)^2}$$

$$R = \sqrt{z^2 + x^2}$$

と置けば、 $z_1 = 0$ のとき

$$G_0(R) = 0, \quad (z_1 = 0) \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial G_0(R)}{\partial z_1} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} H_0^{(2)}(kR_1), \quad (z_1 = 0) \quad (2.89)$$

を満たす。

図2.9 距離 R_1, R_{12} の定義

(2.87) を用いれば、グリーンの定理により、波動関数 $\psi(z, x)$ は

$$\psi(z, x) = \psi_0(z, x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_0(R_1)}{\partial z_1} \bigg|_{z_1=0} \psi(0, x_1) dx_1 \quad (2.90)$$

と書ける。ここで、 $\psi(z, x, \omega)$ を ω を落として $\psi(z, x)$ と書いた。 $\psi_0(z, x)$ は平坦面 ($z = 0$) 上の解で、

$$\psi_0(z, x) = e^{iK_0 x} [-e^{-iK_z z} + e^{iK_z z}] \quad (2.91)$$

である。(2.7) と (2.89) を用いれば、(2.90) は、

$$\psi(z, x) = \psi_0(z, x) - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_0(kR_1)}{\partial z_1} \bigg|_{z_1=0} \frac{\partial}{\partial z_1} [f(T^{x_1} \omega) \psi(0, x_1)] dx_1 \quad (2.92)$$

と書き直せる。これを、逐次近似により解けば、ノイマン級数

$$\begin{aligned} \psi(z, x) = & \psi_0(z, x) - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_0(kR_1)}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} [f(T^{x_1} \omega) \psi_0(0, x_2)] dx_1 \\ & + \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_0(kR_1)}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ f(T^{x_1} \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_0(kR_{12})}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_2} [f(T^{x_2} \omega) \psi_0(0, x_2)] dx_2 \right\} dx_1 \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.93)$$

が得られる。右辺第2項の1重積分は、表面の不規則性による単一散乱を表し、第3項は二重散乱を表現している。一般に、ノイマン級数(2.93)における n 重積分項は n 重散乱を表す。(2.4) により $f(T^x \omega)$ は σ^1 のオーダーであるので、単一散乱は σ^1 のオーダーであり、 n 重散乱は σ^n のオーダーとなることがわかる。このように σ のオーダーと多重散乱の次数が一致することは、近似境界条件(2.7)の利点である。

(2.93) の一般項は複雑であるので、図形(ダイアグラム)で表現しよう。そこで、

$$\psi(z, x) = \text{=====}, \quad \langle \psi(z, x) \rangle = \text{-----} \quad (2.94)$$

$$\psi_0(z, x) = \text{-----}^{(0)} \quad (2.95)$$

$$\left(-\frac{i}{2} \right) \int dx_2 \frac{\partial H_0(kR_{12})}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_2} = \text{-----} \quad (2.96)$$

$$f(T^{x_1} \omega) = \bullet_i \quad (2.97)$$

と右辺の図形で表現すれば、(2.93) はダイアグラム(bare diagram)

$$\text{=====} = \frac{(0)}{\quad} + \frac{(0)}{\quad \underset{1}{\bullet}} + \frac{(0)}{\quad \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}} + \frac{(0)}{\quad \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} \quad \underset{3}{\bullet}} + \dots \quad (2.98)$$

により表示される。この表現の利点は、多重散乱のプロセスが見やすいことである。たとえば、右辺第3項は、位置 x_2 で散乱された波が位置 x_1 で再散乱されることを表現している。

次に、(2.98) の右辺の平均値を計算しよう。右辺のランダム関数は黒丸で示した $f(T^x \omega)$ のみであるので、 $f(T^x \omega)$ の統計モーメントが計算できればよい。 $f(T^x \omega)$ が平均値零の定常ガウス過程とすれば、(A24) の公式

$$\begin{aligned} \langle f(T^{x_1} \omega) f(T^{x_2} \omega) \dots f(T^{x_n} \omega) \rangle &= 0, \quad (n \text{ が奇数}) \\ &= \sum_{\text{all pair}} \prod_{(l,k)} \langle f(T^{x_l} \omega) f(T^{x_k} \omega) \rangle \quad (n \text{ が偶数}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

が成立する。ここで、(2.97) の記号を用い、さらに平均をとる対を破線で結び、

$$C_{lk} = \langle f(T^{x_l} \omega) f(T^{x_k} \omega) \rangle = \langle \bullet_l \quad \bullet_k \rangle = \overset{\text{---}}{\bullet_l \quad \bullet_k} \quad (2.100)$$

と書くことにすると、(2.99) は、あらゆる対分割についての和であるから、たとえば、

$$\begin{aligned} \langle \bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 \bullet_4 \rangle &= \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \bullet_3 \bullet_4 + \bullet_1 \overset{\text{---}}{\bullet_2 \bullet_3} \bullet_4 + \bullet_1 \bullet_2 \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \\ &= C_{12} C_{34} + C_{13} C_{24} + C_{14} C_{23} \end{aligned} \quad (2.101)$$

と書ける。さて、(2.98) を平均し、(2.99) ~ (2.101) を用いれば、

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, x) \rangle &= \text{=====} \\ &= \frac{(0)}{\quad} + \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2}} + \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4}} \\ &+ \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_5 \bullet_6}} + \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_5 \bullet_6}} + \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_5 \bullet_6} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_7 \bullet_8}} \\ &+ \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_5 \bullet_6} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_7 \bullet_8}} + \frac{(0)}{\quad \overset{\text{---}}{\bullet_1 \bullet_2} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_3 \bullet_4} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_5 \bullet_6} \quad \overset{\text{---}}{\bullet_7 \bullet_8}} + \dots \end{aligned} \quad (2.102)$$

となる。これは、さらに $\langle \psi(z, x) \rangle$ についての積分方程式 (Dyson 方程式)

$$\text{=====} = \frac{(0)}{\quad} + \text{=====} \bullet \text{=====} \quad (2.103)$$

に書き直すことができる。ここで大きい黒丸は、Mass operatorとよばれ、

$$\bullet = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \end{array} + \dots \quad (2.104)$$

で与えられる。この右辺は、Connected diagram の和であって、切断できないダイアグラムのみの和である。(2.103)が(2.102)と等しいことは、(2.104)を用いて、(2.103)を逐次近似の意味で級数展開することにより証明される⁽⁹⁴⁾。

(2.104)または(2.102)の総和を求めれば、コヒーレント波 $\langle \psi(z, x) \rangle$ の厳密解が得られることになるが、これは不可能である。そこで、(2.104)の右辺第一項のみを用いてコヒーレント波を近似的に計算することが多い。この様な近似は、Bourret近似またはfirst order smoothing approximationとよばれる。

(2.104)の第一項のみを用いるBourret近似では、(2.103)は、

$$\text{---} \simeq \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{(0)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \quad (2.105)$$

となる。この右辺を逐次近似級数に展開すれば、次の級数の総和に等しいことがわかる。

$$\begin{aligned} \text{---} \simeq & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{(0)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{(0)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{(0)} \end{array} \\ & + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{(0)} \end{array} + \dots \quad (2.106) \end{aligned}$$

これは、(2.102)の部分和であり、特別な形をした偶数回散乱の和である。

(2.94)～(2.97)，(2.100)を用いれば、(2.105)は逆に積分方程式に書き直すことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, x) \rangle = & \psi_0(z, x) + \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_0(kR_1)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_0(kR_{12})}{\partial z_1 \partial z_2} \cdot \langle f(T^{x_{1\omega}}) f(T^{x_{2\omega}}) \rangle \\ & \times \frac{\partial}{\partial z_2} \langle \psi(0, x_2) \rangle dx_1 dx_2 \quad (2.107) \end{aligned}$$

である。ここで、 R_{12} は (x_1, z_1) と (x_2, z_2) との距離であり、微分は $z_1 = z_2 = 0$ での微係数を表すものとする。

(2.107)を解いて、コヒーレント波 $\langle \psi(z, x) \rangle$ を求めよう。このため、

$$\langle \phi(z, x) \rangle = e^{iK_0 x} \left[-e^{-iK_z z} + (1+A_0) e^{iK_z z} \right] \quad (2.43)$$

$$H_0(kR_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x_1-x_2)} e^{i\sqrt{k^2-\lambda^2}(z_1-z_2)}}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} d\lambda, \quad (z_1-z_2 \geq 0) \quad (2.108)$$

と置き、(形式的な)関係式

$$\phi_0(0, x) = 0, \quad (2.109)$$

$$\langle \phi(0, x) \rangle = e^{iK_0 x} A_0, \quad (2.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \phi(0, x) \rangle = iK_z [2+A_0] e^{iK_0 x} \quad (2.111)$$

$$\left. \frac{\partial H_0(kR_1)}{\partial z_1} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z=0}} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-x_1)} d\lambda = -2i\delta(x-x_1) \quad (2.112)$$

$$\left. \frac{\partial^2 H_0(kR_{12})}{\partial z_1 \partial z_2} \right|_{z_1=z_2=0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2-\lambda^2} e^{i\lambda(x_1-x_2)} d\lambda \quad (2.113)$$

$$\langle f(T^{x_1}\omega) f(T^{x_2}\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda(x_1-x_2)} d\lambda \quad (2.33)$$

を用いて、(2.107)を計算する。その結果、

$$\begin{aligned} A_0 e^{iK_0 x} &= -(1+A_0/2)K_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 H_0(kR_2)}{\partial z \partial z_2} \cdot \langle f(T^{x_1}\omega) f(T^{x_2}\omega) \rangle e^{iK_0 x_2} dx_2 \\ &= -(2+A_0)K_z \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 e^{iK_0 x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda_2)|^2 e^{i(x_2-x_1)\lambda_2} d\lambda_2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2-\lambda_1^2} e^{i\lambda_1(x_1-x_2)} d\lambda_1 \\ &= -e^{iK_0 x} K_z (2+A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 k_z(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.114)$$

が得られる。これを解いて A_0 を計算すれば、

$$A_0 = -\frac{2Z'_S}{1+Z'_S} \quad (2.115)$$

$$Z'_S = K_z \int_{-\infty}^{\infty} k_z(\lambda) |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (2.116)$$

となる。これは、Bass-Fuks の解(1.58)(1.59)と同じ式である。もし分

母の $M(\lambda)$ を無視すれば、我々の解 (2.57) は (2.116) と一致する。

従って (2.57) は、級数 (2.106) よりも多くの項を含むことになる。実際 (2.57) は、Mass operator として無限級数

$$\bullet \simeq \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \dots \quad (2.117)$$

用いたものと一致することを次に示す。(2.117) と (2.103) (2.109) により、 $z = 0$ における Dyson 方程式は、

$$\begin{array}{c} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \dots \quad (2.118)$$

と書ける。この右辺の第 2 項を (2.94) ~ (2.97), (2.109) ~ (2.113) を用いて計算すれば、

$$\begin{array}{c} \text{---} \end{array} = -e^{iK_0 x} K_Z (2+A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2 \left[-k_Z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1 + \lambda) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right] d\lambda \quad (2.119)$$

となる。同様の計算により、右辺第 3 項は、

$$\begin{array}{c} \text{---} \end{array} = -e^{iK_0 x} K_Z (2+A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2 \left[-k_Z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1 + \lambda) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right]^2 d\lambda \quad (2.120)$$

となるので、一般の場合

$$\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ 個の対}} = -e^{iK_0 x} K_Z (2+A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2 \left[-k_Z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda_1 + \lambda) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right]^n d\lambda \quad (2.121)$$

となることが予想される。従って (2.118) 右辺の総和は、

$$\begin{aligned}
& -e^{iK_0 x} K_Z (2+A_0) \int \frac{k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2}{1+k_Z(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} k_Z(\lambda+\lambda_1) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1} d\lambda \\
& = -e^{iK_0 x} K_Z (2+A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2}{1+M(\lambda)} d\lambda \quad (2.122)
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで $M(\lambda)$ は (2.54) で定義された関数である。(2.118) の左辺は、(2.110) により $A_0 e^{iK_0 x}$ に等しいから、結局、

$$A_0 = - \frac{2Z_s}{1+Z_s}, \quad (2.123)$$

$$Z_s = K_Z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2}{1+M(\lambda)} d\lambda \quad (2.124)$$

となる。これは、我々の解 (2.56) (2.57) と同じ式である。

(2.117) を Mass Operator とする多重散乱を、逐次近似級数で書けば、(2.117) の各項のあらゆる積からなる多重散乱を含むことが容易にわかる。従って、(2.56) (2.57) は、そのような多重散乱を含んだ解であることが結論できる。

表 2. 1 回折格子の理論と不規則表面による波動散乱理論との比較

| | 周期的表面 (回折格子) | 不規則表面 |
|------|--|--|
| 表面 | <p>周期性 (a: 周期)</p> $z=f(x)=f(x+a), (-\infty \leq x \leq \infty)$ <p>$f(x)$ は周期関数</p> | <p>確率的一様性 (Ω: 見本空間, ω: 見本点)</p> $z=f(T^x\omega), (-\infty \leq x \leq \infty)$ <p>$f(T^x\omega)$ は強定常確率過程</p> |
| 解の形 | <p>(Floquet の形)</p> $e^{iK_0x} [e^{-iK_z z} + U(z, x)]$ $U(z, x) = U(z, x+a)$ <p>x に関する周期関数</p> | $e^{iK_0x} [e^{-iK_z z} + U(z, T^x\omega)]$ $U(z, T^x\omega)$ <p>x に関する強定常確率過程</p> |
| 解法 | <ul style="list-style-type: none"> ○ フーリエ級数 ○ フーリエ振幅を求める。 ○ 任意の 1 周期について解く。 | <ul style="list-style-type: none"> ○ ウィナー展開 ○ 展開係数 (関数) を求める。 ○ 任意の 1 点 x について確率変数として解く。 |
| 思想 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 連続関数として境界条件を満たす。 (Rayleigh の仮説) 2. 境界条件に関する自乗平均誤差を最小となるように部分和のフーリエ振幅を決める。 (Rayleigh の展開定理) | <ul style="list-style-type: none"> ○ 自乗 (確率) 平均の意味で, 境界条件を満たすように展開係数 (関数) を決める。 |
| 光学定理 | <p>(完全導体表面)</p> $\frac{1}{a} \int_0^a \text{Im} \left[\frac{\psi^*}{k} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right] dx = 0$ <p>(1 周期の平均)</p> | $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \text{Im} \left[\frac{\psi^*}{k} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right] dx$ $= \langle \text{Im} \left(\frac{\psi^*}{k} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) \rangle = 0$ <p>(エルゴード性, 任意の 1 点での確率平均)</p> |

2.7 ま と め

A. 回折理論との比較

この章で展開した散乱の確率理論は、回折格子における周期的表面の仮定を確率的に一樣な不規則表面に置きかえたものである。回折理論のアナロジーとして容易に理解することができる。表 2.1 は、回折理論と対比したものである。

B. 成 果

この章の第一の成果は、不規則表面が強義の定常確率過程であれば、散乱波の形は指数関数と一樣確率場の積に書けることを導出したことである。このことより、コヒーレント反射波が鏡面反射成分のみをもつことが直ちに導けた。コヒーレント波のこの性質は、従来、計算により経験的に知られていたが、不規則表面の確率的一樣性の論理的帰結であることがわかった訳である。第二の成果は、ウィナー展開を用いて未知の一樣確率場を計算すれば、簡単な計算により多重散乱を含む解が得られることを明らかにしたことである。実際、我々の解は、従来の方法では導きえないものであり、摂動解、Bass-Fuks の解を拡張したものであった。第三の成果は、新しい光学定理を導いたことである。これは、入射電力とコヒーレント反射電力、インコヒーレント散乱電力に関する厳密式であるので、近似解の精度の検討に用いた。数値計算により、我々の解は、表面粗さが小さい場合には光学定理を近似的に満たすことを確かめた。

C. 問 題 点

散乱波が外向伝搬波と表面波の和で書けるとする Rayleigh の仮設をもとに、散乱波のウィナー展開を与えた。平面上のリアクタンス境界条件 (2.7) に対しては、このような展開は無条件に成立すると考えられるが、一般の境界条件に対しては、ウィナー展開が不規則表面をも含む領域で収束すること、少なくとも自乗平均収束することを仮定する必要がある。しかし、このような Rayleigh の仮説の確率関数への拡張は、未検討の事項であり、今後の検討によらなければならない。

不規則表面による波動散乱は、非線形の問題であるので、将来においても厳密解を得ることは困難であり、近似解析によらなければならないと考えられる。解析の近似誤差は、光学定理及び第 4 章で述べる境界条件に関する誤差によって定性的に推定できるが、これらは直接的ではないので、厳密解 ψ と近似解 ψ_a との差を何らかの方法で評価することが望まれる。有限の散乱体の場合や回折

格子の場合には，差 $|\psi - \psi_a|$ を評価する方法が知られているが⁽⁷⁶⁾，無限の不規則表面に対しては，このような評価法は確立していない。たとえば，自乗平均誤差 $\langle |\psi - \psi_a|^2 \rangle$ を定式化することができれば，種々の解法の有効性を論ずる重要な手段となると思われる。

第三章 一次元不規則表面によるスカラー波の 散乱（ノイマン条件）

3.1 ま え が き

前章では、一次元不規則表面によるスカラー波の散乱を、確率過程の考えをもとに定式化し、統計的散乱特性を解析した。表面の粗さが波長に比べて小さいと仮定し、ディリクレ条件を展開して得られる近似境界条件をモデルとした。この章では、ノイマン条件を展開・近似して得られるモデル境界条件に対して、同様の解析を行う。

ディリクレ条件の場合には通常の摂動論を用いても近似解が得られる。しかし、ノイマン条件に対しては摂動法は有効な解析手段ではない。これは、Rayleigh の回折理論（1.3 E 節）と同様、一次摂動解が発散するためである。さらに、二次の摂動から得られるコヒーレント反射波の振幅は、水平入射（図 3.1 にて $\theta_0 = \pi/2$ ）において発散する。

このような発散の困難をさけるため、Bass-Fuks⁽⁵⁴⁾ は、波動関数を平均値（コヒーレント波）と変動分（インコヒーレント波）に分割する計算法を用いた（1.3 G 節）。この方法によれば、コヒーレント散乱振幅はあらゆる入射角に対して有限で発散することはないが、インコヒーレント波の発散は解決できない。

この章の問題は、外見上の簡単さにもかかわらず、現在に至るまで未解決であり、この意味で新しい問題と言えよう。本章では、ウィナー展開を用いる波動関数の計算法を用いて、コヒーレント反射とインコヒーレント散乱における発散の困難を解決し、散乱に関する種々の統計量を統一的・合理的に導く。

ノイマン条件に対する散乱の特徴は、a) インコヒーレント散乱の指向性が、水平方向（図 3.1 で $\theta \simeq \pm\pi/2$ となる方向）に異常に強くなること、b) 水平入射（ $\theta_0 = \pi/2$ ）に近いある入射角のとき、コヒーレント反射がほとんど消滅し、インコヒーレント散乱が逆に支配的になることである。このような異常散乱の原因及び不規則表面上を伝搬する自由モードとしての表面波モードについて、3.5 節で考察する。

3.2 問題の定式化

無限の 1 次元不規則表面によるスカラー平面波の散乱を考える（図 3.1）。不規則表面は、ガウス強定常過程であり、（2.29）と同じウィナー積分

$$z = f(T^x \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda), \quad (-\infty \leq x \leq \infty) \quad (3.1)$$

$$F(\lambda) = F^*(-\lambda)$$

で記述されるものとする。複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda)$ の性質 (2.3.1) (2.3.2) により, $f(T^x \omega)$ の平均と分散は,

$$\langle z \rangle = \langle f(T^x \omega) \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\sigma^2 = \langle f^2(T^x \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.3)$$

となる。ここで σ は表面粗さの実効値で, 長さの次元をもつ。波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ は自由空間において, 波動方程式

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(z, x, \omega) = 0, \quad (z > f(T^x \omega)) \quad (3.4)$$

を満たし, 不規則表面 (3.1) の上でノイマン条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (z = f(T^x \omega)) \quad (3.5)$$

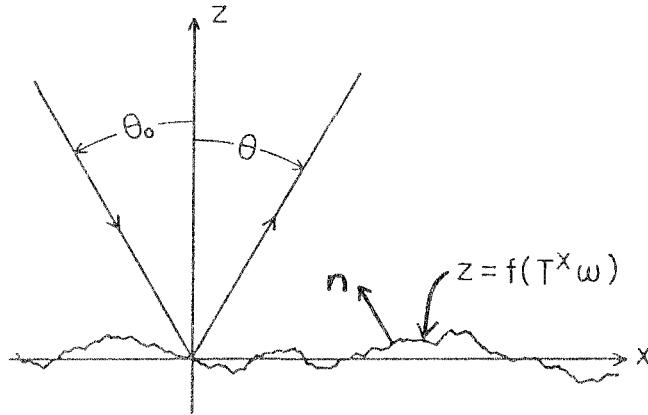


図 3.1 不規則表面による平面波の散乱 (θ_0 : 入射角, θ : 散乱角)

を満たす。但し, $\partial/\partial n$ は法線微分である。法線ベクトル \mathbf{n} は, 座標軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ と書けば,

$$\mathbf{n} \propto \left(-\frac{df}{dx} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \right) \quad (3.6)$$

であるから, 境界条件 (3.5) は

$$-\frac{df}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (z = f(T^x \omega)) \quad (3.7)$$

とも書ける。この条件が意味をもつためには, $f(T^x \omega)$ の微分が存在しなけ

ればならない。そこで、条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |F(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \quad (3.8)$$

を仮定する。これは、 $f(T^x \omega)$ の微分が自乗平均の意味で存在する条件である。

以下では、表面粗さ σ が十分小さい ($k\sigma \ll 2\pi$) 場合を取扱うので、(3.7)

を展開して得られる近似境界条件

$$-\frac{df}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (z=0) \quad (3.9)$$

をランダム境界条件のモデルとする。これは、平面 ($z=0$) 上の境界条件である。

(3.1) が y 方向に一様な完全導体の不規則表面の式であるとすれば、波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ は磁界の y 成分、 H_y 、であると見なせる。すなわち、TM波の散乱を論ずることになる。

不規則表面が強定常確率過程であるから、平面波

$$\psi_i(z, x) = \exp(iK_0 x - iK_z z) \quad (3.10)$$

が入射するとき、波動関数は強定常過程 $U(z, T^x \omega)$ により

$$\psi(z, x, \omega) = e^{iK_0 x} [e^{-iK_z z} + e^{iK_z z} + U(z, T^x \omega)] \quad (3.11)$$

と書ける(2.2節)。ここで、 K_0 と $(-K_z)$ は入射波数ベクトルの x 成分と z 成分であり、図3.1の入射角 θ_0 と次式の関係にある。

$$K_0 = k \sin \theta_0, \quad K_z = \sqrt{k^2 - K_0^2} = k \cos \theta_0 > 0 \quad (3.12)$$

(3.11) 右辺において、括弧内の第一項は入射平面波、第二項は平坦面 ($\sigma=0$) からの鏡面反射波、第三項は表面粗さによって生ずる散乱波である。この第三項の $U(z, T^x \omega)$ を以下で計算する。

強定常過程 $U(z, T^x \omega)$ は、不規則表面 $f(T^x \omega)$ の汎函数であり、また(3.1)により複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda)$ の汎函数でもあるので、前章と同様にウィナー展開により表現できる。散乱波 $\exp(iK_0 x) U(z, T^x \omega)$ は、波動方程式(3.4)及び遠方 ($z \rightarrow \infty$) での放射条件を満たすから、

$$\begin{aligned} U(z, T^x \omega) = & A_0 e^{iK_z z} + \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) e^{i\lambda x + iK_z(\lambda)z} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)x + iK_z(\lambda_1 + \lambda_2)z} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

と書く。これは、(2.41)と同じ方程式であり、 λ や λ_1, λ_2 は不規則表面のブラッグベクトルである。 $k_z(\lambda)$ は、波数ベクトルの z 成分を表す関数で、

$$k_z(\lambda) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} \geq 0, \quad (k^2 \geq (K_0 + \lambda)^2) \quad (3.14a)$$

$$= i \sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2}, \quad (k^2 \leq (K_0 + \lambda)^2) \quad (3.14b)$$

である。(3.14a)は伝搬する平面部分波に、(3.14b)は表面波($z \rightarrow \infty$ で減衰するエバネセント波)に、それぞれ対応している。 A_0 は定数、 A_1 や A_2 はランダムではない通常関数であり、 A_n は n 個の変数に関して対称な関数である。また、 $h^{(n)}$ は付録Aで定義した複素ウィナーエルミット微分式で、(A111)～(A114)の性質をもつ。

(3.11)(3.13)(A114)により、コヒーレント波は、

$$\langle \psi(z, x, \omega) \rangle = e^{iK_0 x} \left[e^{-iK_z z} + (1 + A_0) e^{iK_z z} \right] \quad (3.15)$$

となる。明らかに $(1 + A_0)$ はコヒーレント波の反射係数である*。複素ウィナーエルミット微分式の直交性(A114)により、 $U(z, T^x \omega)$ の自乗平均値は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle |U(z, T^x \omega)|^2 \rangle &= |A_0|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(\lambda)|^2 e^{-2 \operatorname{Im}[k_z(\lambda)z]} d\lambda \\ &+ 2! \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 e^{-2 \operatorname{Im}[k_z(\lambda_1 + \lambda_2)z]} d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \quad (3.16) \end{aligned}$$

被積分関数中の指数因子は、表面波の影響を表している。また、この右辺は非負の数の和であるから、 $U(z, T^x \omega)$ が自乗平均の意味で存在するためには(有限であるためには)、右辺の各項が有限値を取る必要がある。従って、任意の $z (\geq 0)$ に対して左辺が存在するための必要条件として

$$|A_0| < \infty \quad (3.17)$$

$$n! \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n < \infty, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

が得られる。次節では、この条件を満たす A_0 と A_1 を求める。

(3.16)における指数因子は、 z が大きいとき、 $\operatorname{Im}(k_z(\lambda)) > 0$ となる λ に対して急激に減衰する。つまり、 $z \rightarrow \infty$ では表面波の寄与が無視できることになる。従って、波動関数の分散は、 z が大きいとき

* 前章(2.43)では、 E_y 成分の反射係数であったが、これは H_y に対する反射係数であるので、位相が π だけ異なる。

$$\begin{aligned}
& \langle |\psi(z, x, \omega) - \langle \psi(z, x, \omega) \rangle|^2 \rangle, \quad (z \rightarrow \infty) \\
& = \langle |U(z, T^x \omega) - \langle U(z, T^x \omega) \rangle|^2 \rangle \\
& = \int_{(K_0 + \lambda)^2 < k^2} |A_1(\lambda)|^2 d\lambda + 2! \iint_{(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 < k^2} |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \quad (3.19)
\end{aligned}$$

に漸近する。後の 3.4 節では、この右辺第一項を近似的に求める。

3.3 展開係数の近似解

ウィナー展開 (3.13) の展開係数 A_0, A_1, \dots , が定められれば, (3.11) により波動関数 $\psi(z, x, \omega)$ が逆に求まる。本節では, 境界条件 (3.9) を用いて, 展開係数の近似解を計算する。

(3.9) に (3.11) を代入すれば, $U(z, T^x \omega)$ に対する境界条件

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{df}{dx} \left[iK_0(2+U) + \frac{\partial U}{\partial x} \right] + f \left[-2K_z^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (z=0) \quad (3.20)$$

を得る。これは, 強定常過程 $f(T^x \omega)$, $U(z, T^x \omega)$ のみを含む方程式であるので, $x=0$ と置いて確率方程式と見なして解くことができる。

(3.1) (3.13) を (3.20) に代入し, 複素ウィナーエルミット微分式の漸化式 (A112) を用いて, 左辺全体を再びウィナー展開し, 各次数ごとに展開係数を零とおけば,

(0 次)

$$iK_z A_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} [k_z^2(\lambda) + \lambda(\lambda + K_0)] A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda = 0, \quad (3.21)$$

(1 次)

$$\begin{aligned}
& i k_z(\lambda) A_1(\lambda) - (2 + A_0)(K_z^2 - \lambda K_0) F(\lambda) \\
& - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda(K_0 + \lambda + \lambda_1) + k_z^2(\lambda + \lambda_1)] F^*(\lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) d\lambda_1 = 0, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

(2 次)

$$\begin{aligned}
& i k_z(\lambda + \lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) + \frac{1}{2} [\lambda(K_0 + \lambda_1) - k_z^2(\lambda_1)] A_1(\lambda_1) F(\lambda) \\
& + \frac{1}{2} [\lambda_1(K_0 + \lambda) - k_z^2(\lambda)] A_1(\lambda) F(\lambda_1) \quad (3.23) \\
& - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} [k_z^2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1(K_0 + \lambda + \lambda_1 + \lambda_2)] A_3(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) F^*(\lambda_2) d\lambda_2 = 0,
\end{aligned}$$

等々を得る。これらは, 展開係数に関する無限連立方程式であるので, 解くには適当な次数 n 以上の係数 A_n を無視する必要がある。(3.3) により $F(\lambda)$ が σ のオーダーの関数であることに注意すると, (3.22) により $k_z(\lambda) A_1(\lambda)$

は高々 σ^1 のオーダーであり、(3.21)(3.23)により $K_Z A_0$ と $K_Z(\lambda+\lambda_1) \times A_2(\lambda, \lambda_1)$ は共に高々 σ^2 のオーダーの微小量であることがわかる。このことから、十分小さい σ に対しては、 A_2 を無視することができる。しかし、 A_0 は σ^2/K_Z のオーダーであるので、 K_Z が零に近いときには、かならずしも微小量ではなく、 $A_1(\lambda)$ は $\sigma/k_Z(\lambda)$ のオーダーであるので、 $k_Z(\lambda) \simeq 0$ のときには異常に大きくなりうる。

方程式を簡単にするため、先ず $A_2 = A_3 = 0$ と置けば、(3.22)より

$$A_1(\lambda) \simeq \frac{i(2+A_0)(\lambda K_0 - K_Z^2)}{k_Z(\lambda)} F(\lambda) \quad (3.24)$$

を得る。これは、Bass-Fuks の方法で得られるものである⁽⁵⁴⁾。また $A_0 = 0$ とおけば一次摂動解と一致する。この右辺は、 σ のオーダーの微小量であるが、Rayleigh の摂動解(1.27)と同様、Rayleigh 波数

$$k_Z(\lambda) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} = 0, \\ K_0 + \lambda = \pm k \quad (3.25)$$

に対応する λ で発散し、かつ、条件(3.18)を満足しない。従って、散乱波の分散(3.16)は発散することになる。しかし、このような発散は物理的にはありえないので、(3.24)の近似精度がRayleigh 波数(3.25)に対しては悪いことを意味する。

近似精度を上げるには、先に無視した A_2 の効果を取入れる必要がある。そこで、 $A_3 = 0$ と置き、(3.23)から A_2 を求めれば、

$$A_2(\lambda, \lambda_1) \simeq \frac{i[\lambda(K_0 + \lambda_1) - k_Z^2(\lambda_1)]}{2k_Z(\lambda + \lambda_1)} A_1(\lambda_1) F(\lambda) \\ + \frac{i[\lambda_1(K_0 + \lambda) - k_Z^2(\lambda)]}{2k_Z(\lambda + \lambda_1)} A_1(\lambda) F(\lambda_1) \quad (3.26)$$

を得る。これを(3.22)に代入し、 A_2 を消去すれば、

$$i \left\{ k_Z(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda_1 + \lambda)(K_0 + \lambda)]^2}{k_Z(\lambda + \lambda_1)} |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right\} A_1(\lambda) \\ + (2 + A_0)(\lambda K_0 - K_Z^2) F(\lambda) \\ + iF(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda_1)(K_0 + \lambda + \lambda_1)]^2}{k_Z(\lambda + \lambda_1)} F^*(\lambda_1) A_1(\lambda_1) d\lambda_1 = 0 \quad (3.27)$$

を得る。ここで、 $\{ \quad \}$ の中の積分項は、 A_2 から生じる補正項である。左辺第三項は σ^3 のオーダーで、第二項に対する補正であるので、これを無視する

と, $A_1(\lambda)$ の近似解

$$A_1(\lambda) \simeq \frac{i(2+A_0)(\lambda K_0 - K_z^2)}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} F(\lambda), \quad (3.28)$$

$$r(\lambda) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda + \lambda_1)(K_0 + \lambda)]^2}{k_z(\lambda + \lambda_1)} |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (3.29)$$

を得る。 $r(\lambda)$ は σ^2 のオーダーの複素数 (無次元の数) であるので, (3.28) 右辺は Rayleigh 波数 (3.25) に対しても有限で発散しない。しかし, Rayleigh 波数に対しては, 分子が σ のオーダーで分母が σ^2 のオーダーであるので $|A_1(\lambda)|$ は $1/\sigma$ のオーダーとなることに注意する必要がある。一方, $k_z(\lambda) \neq 0$ では, 分母の $k r(\lambda)$ は無視できるから, $|A_1(\lambda)|$ は σ のオーダーである。このため, $|A_1(\lambda)|$

は Rayleigh 波数を与える λ に対して鋭いピークをもつ (図 3.2)。

波動関数の分散が有限であるためには, $A_1(\lambda)$ は (3.18) の条件を満たさなければならない。そこで, 図 3.2 のピークが (3.18) の積分に与える影響を簡単に見ておこう。

$|A_1(\lambda)|$ の半値幅を $\delta\lambda$ とおけば,

$$K_0 + \lambda = \pm k + \delta\lambda$$

$$|k_z(\lambda)| = |\sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2}| \simeq \sqrt{2k} |\sqrt{\delta\lambda}| \sim \sigma^2 \quad (3.30)$$

により,

$$\delta\lambda \sim \sigma^4 \quad (3.31)$$

である。そこで, この様なピークの $|A_1(\lambda)|^2$ の積分への寄与は, (高さ $1/\sigma^2$) \times (幅 σ^4) であるから, σ^2 のオーダーである。つまり, 近似解 (3.28) は, 条件 (3.18) を満たすことが確かめられた。

後に数値計算例を示すが, 散乱波の分散は σ^2 に比例し, $\sigma^2 \rightarrow 0$ のとき零になる。このことは, 表面粗さが消滅していけば散乱波は平坦面からの反射波に収束することを意味するので, 物理的には当然のことである。しかし, この収

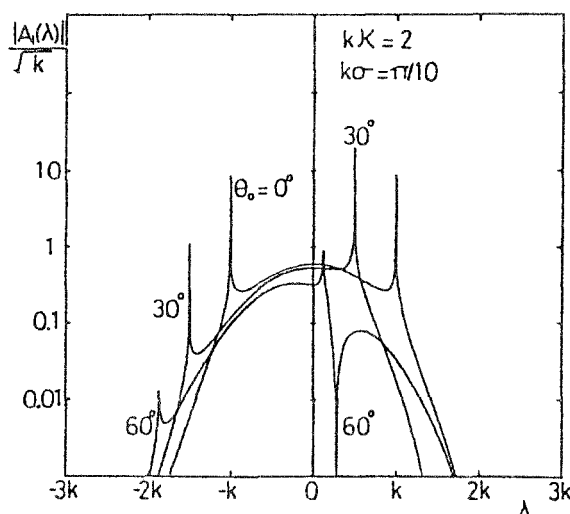


図 3.2 関数 $|A_1(\lambda)|$

束は自乗平均の意味にすぎない。実際、 $\sigma \rightarrow 0$ の極限において、 $|A_1(\lambda)|$ は、 $k_z(\lambda) \neq 0$ では零に収束し、 $k_z(\lambda) = 0$ では発散する。

この事実は、摂動法の欠点を明らかにしている。即ち、 $1/\sigma$ に比例する鋭いピークをもつ解は、 σ の正巾のみで展開する通常の摂動法では得られないものである*。別の見方をすれば、摂動展開は λ に関して一様な近似を与えないとも考えられる。

ウィナー展開の利点は、波動関数の発散という解析上の困難を高次項からの補正を取入れることによって容易に解決できることである。また、補正量は、導出のための特別の考察を必要とせず、機械的に計算するだけで得られる。

次に、定数 A_0 を計算しよう。(3.28)を(3.21)に代入して $A_1(\lambda)$ を消去すれば、

$$K_z A_0 + (2 + A_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda) K_0]^2}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 0 \quad (3.33)$$

これを解いて A_0 を求めれば、

$$A_0 = - \frac{2 Z_s}{1 + Z_s} \quad (3.34)$$

となる。ここで、 Z_s は不規則表面の等価インピーダンスで

$$Z_s = \frac{1}{K_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda) K_0]^2}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.35)$$

である。(3.15)におけるコヒーレント波の反射係数は、(3.34)により、

$$1 + A_0 = \frac{1 - Z_s}{1 + Z_s} \quad (3.36)$$

となる。(3.34)は、前章(2.56)と全く同じ形であるが、 Z_s は前章(2.57)と異なっている。(3.35)の特徴は、 $K_z = k \cos \theta_0$ (θ_0 :入射角)に逆比例することである。

(3.36)より、 $Z_s = 0$ はコヒーレント波の反射係数1に対応し、 $Z_s = \infty$ は逆相反射($1 + A_0 = -1$)に対応する。もし $Z_s = 1$ であれば、コヒーレントな反射波が全くない状態になる。ところで、(3.35)により Z_s は高々 σ^2 のオー

*) しかし、摂動級数の総和(または部分和)を解析接続すれば、 $1/\sigma$ に比例する解が得られる。(3.28)の分母を $k_z(\lambda) \neq 0$ と仮定して展開すれば、(3.28)は σ に関する高次の項(無限個の項)の総和である。従って(3.28)は摂動級数の部分和を解析接続することにより得られるはずである。

ダーであるから、通常 $(1+A_0) \simeq 1$ である。ところが、 Z_s は K_z に逆比例するので、入射角 θ_0 が $\pm \pi/2$ に近づくとき発散し、この結果、 $(1+A_0) = -1$ となる。この状態では $(2+A_0) = 0$ となるので、(3.28) により $A_1(\lambda) = 0$ となり、インコヒーレント散乱が消滅することになる。 Z_s 自身は複素数であるから、 $Z_s = 1$ となることはありえない。しかし、 $\theta_0 \simeq \pi/2$ のとき、近似的に $Z_s \simeq 1$ となることはありえる。このような入射角 θ_0 に対しては、コヒーレント反射がほとんど消滅する。

この現象が、誘電体-真空の平面境界におけるブリュースター角と類似していることを指摘したい。ブリュースター角においては、誘電体境界からの反射がほとんど消滅し、入射電力はほとんど透過する。不規則表面の場合には、ある入射角 θ_0 でコヒーレント反射がほとんどなくなり、入射電力はほとんどインコヒーレント散乱電力となる。両者に共通することは、この様な特異現象は入射電界が入射面内にある TM 波の場合に発生することである。

(3.35)(3.28) は分母に関数 $r(\lambda)$ をもつため、後の数値計算がやや複雑となる。そこで、これらを近似して簡単化することを考えよう。まず、(3.35) では、 $r(\lambda) = 0$ としても右辺の積分は収束するので、

$$Z_s \simeq \frac{1}{K_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda)K_0]^2}{k_z(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.37)$$

と近似する。(3.28) においては、 $k_z(\lambda) \neq 0$ では、 $r(\lambda)$ の寄与は小さいので、Rayleigh 波数に対する補正

$$r' = r(k - K_0) = r(k + K_0) = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 |F(\lambda)|^2}{\sqrt{k^2 - (k + \lambda)^2}} d\lambda \quad (3.38)$$

を定数として取入れるにとどめ

$$A_1(\lambda) \simeq \frac{i(2+A_0)(\lambda K_0 - K_z^2)}{k_z(\lambda) + k r'} F(\lambda) \quad (3.39)$$

と近似して次節の数値計算を行う。また、(3.26) の $A_2(\lambda, \lambda_1)$ は条件 (3.18) を満足しないので無視する必要がある。(3.18) を満たす A_2 は、 A_3 からの補正を取入れれば得られるが、ここでは省略する。

Z_s を σ^2 のオーダーの微小量とみなして (3.36) を近似し、(3.37) を用いれば、

$$1 + A_0 \simeq 1 - 2Z_s = 1 - \frac{2}{K_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda)K_0]^2}{k_z(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.40)$$

となる。これは、通常の二次の摂動より得られるものである。この右辺は、 $K_z = k \cos \theta_0 = 0$ で発散する。このため、入射角 θ_0 が大きいときには、正しいコヒーレント散乱振幅を与えず、 $|1+A_0| > 1$ となるという物理的にも誤った結果を導く。

3.4 散乱特性の計算

前節で展開係数の近似解を得たので、本節では、それを用いて散乱の統計的特性を計算する。数値計算のため、前章では有理型スペクトル (2.61) を用いたが、ここではガウス型スペクトル

$$|F(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 \kappa}{\sqrt{\pi}} \exp(-\kappa^2 \lambda^2) \quad (3.41)$$

をもつと仮定する。(2.33)(3.41)により、不規則表面の相関関数は、

$$C_f(x) = \langle f(T^{x+a}\omega) f(T^a\omega) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2}\right) \quad (3.42)$$

となる。ここで、 κ は相関距離を表すパラメータで、長さの元をもつ。不規則表面の傾きの実効値は、(3.42)を用いて

$$\sqrt{\left\langle \left(\frac{df(T^x\omega)}{dx} \right)^2 \right\rangle} = \sqrt{-\frac{d^2 C_f(x)}{dx^2} \Big|_{x=0}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2} \kappa} \quad (3.43)$$

となり、表面の高さ σ と相関距離 κ との比となる。(3.42)において $\kappa \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 \kappa}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2 \lambda^2} = \sigma^2 \delta(\lambda) \quad (3.44)$$

である。 $\kappa = \infty$ は、見本過程としての表面に凹凸がなく、表面の位置 z がガウス分布に従うことに対応するので、物理的意味はない。しかし、この性質は数値計算プログラムのデバッグに便利である。

A. コヒーレント散乱

(3.36)により、コヒーレント波の反射係数は $(1+A_0)$ である。(3.41)と(3.37)を用いて、数値積分により Z_s を求め、さらに(3.34)を使って A_0 を計算した。図 3.3 は、 A_0 の入射角 θ_0 への依存性を示す。 $\theta_0 \leq 60^\circ$ のとき、 A_0 の実部はほぼ $2k^2\sigma^2$ で小さいが、 θ_0 が 90° に近づくとき、急に変化して -2 に近づく。これは、 Z_s が $K_z = k \cos \theta_0$ に逆比例するためである。図 3.4 は、反射係数 $(1+A_0)$ の振幅と位相を入射角に対して示したものである。入射角が 90° 近傍で位相が急激に変化し、振幅にディブを生ずる。この振幅・位

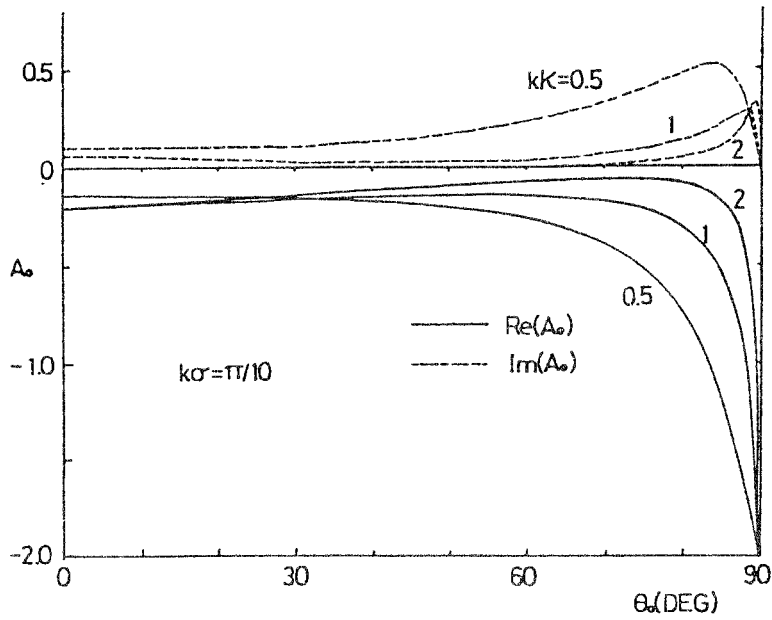


図 3.3 A_0 の入射角 θ_0 への依存性 (κ は相関距離)

相特性は、誘電体平面境界におけるブースター角と見かけ上よく似ている。
〔たとえば、文献⁽¹⁾の P 38, 図 1.22 と比較されたい〕。

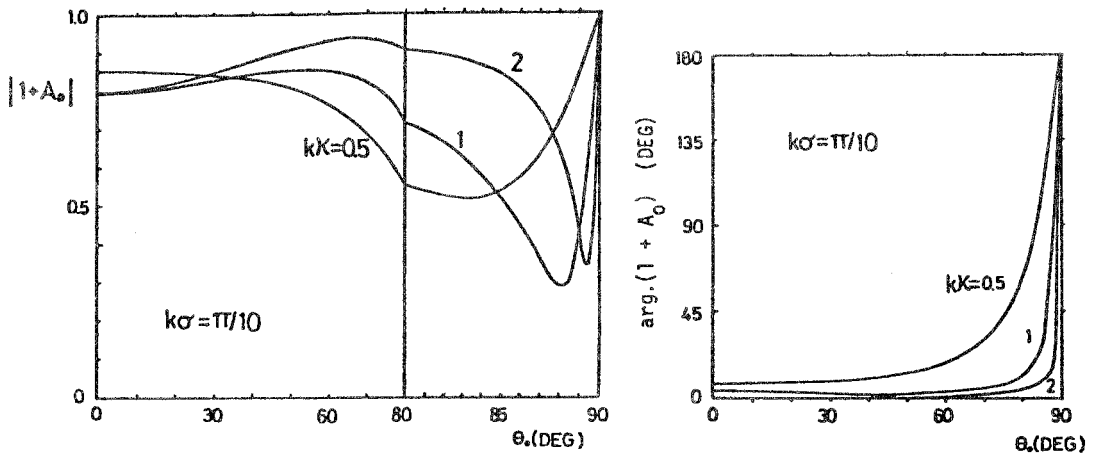


図 3.4 反射係数 $(1 + A_0)$ の振幅と位相

B. 補正量 r'

近似解 (3.39) は、分母に補正量 r' を含む。表 3.1 は、(3.38) を数値積分により求めたものである。相関距離のパラメータ $k\sigma$ が大きくなるにつれ、 r' の値は実部・虚部ともに小さくなる。これは、被積分関数が因子 λ^2 をもつので、 κ が大となりスペクトルが原点 ($\lambda=0$) に集中するにつれて積分値が小となるためである。 $\kappa \rightarrow \infty$ の極限においては、(3.44) の性質により、 $r'=0$ となる。 r' の虚部が負であるのは、 $k_z(\lambda)$ の定義 (3.14b) による。

表 3.1 補正量 r' (式 (3.38) (3.41) による)

| $k\sigma$ | $r'/(k^2 \sigma^2)$ |
|-----------|---------------------|
| 0.5 | 0.6598 - 0.9948 i |
| 1.0 | 0.2832 - 0.1698 i |
| 1.5 | 0.1245 - 0.0856 i |
| 2.0 | 0.0747 - 0.0572 i |

C. 散乱波の分散

摂動解では、散乱波の分散は発散する。しかし、前節の近似解では発散せず、散乱波の分散は有限になる。(3.39) (3.19) により、 $z=\infty$ での分散は、近似的に

$$\langle |\psi(z, x, \omega) - \langle \psi(z, x, \omega) \rangle|^2 \rangle \simeq |2 + A_0|^2 \int \frac{(\lambda K_0 - K_z^2)^2}{|k_z(\lambda) + k r'|^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda$$

$$(K_0 + \lambda)^2 \langle k^2 \rangle \quad (3.45)$$

となる。(3.41) を用いて、その右辺を数値積分し、その結果を図 3.5 に示す。 $k\sigma$ が小であるとき、分散はほぼ $k^2 \sigma^2$ に比例するが、 $k\sigma \geq \pi/8$ では、分散の増加の割合が減少している。これは、 $k\sigma$ が増えれば、 $\text{Re}(A_0)$ が減少し、また r' が増加するためである。さらに図 3.5b では $k\sigma$ の増大とともに分散が減少することを示している。このような分散の減少は物理的にありえないので、 $A_1(\lambda)$ の近似解が $k\sigma \geq \pi/8$ では近似が悪くなることを示唆している。

D. 光学定理

2.5 B 節と全く同様の計算により光学定理が導ける。実際、(3.5) を仮定すれば、(2.72) と全く同じ

$$\frac{K_z}{k} = |1 + A_0|^2 \frac{K_z}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int k_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$$

$$(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^2 \langle k^2 \rangle \quad (3.46)$$

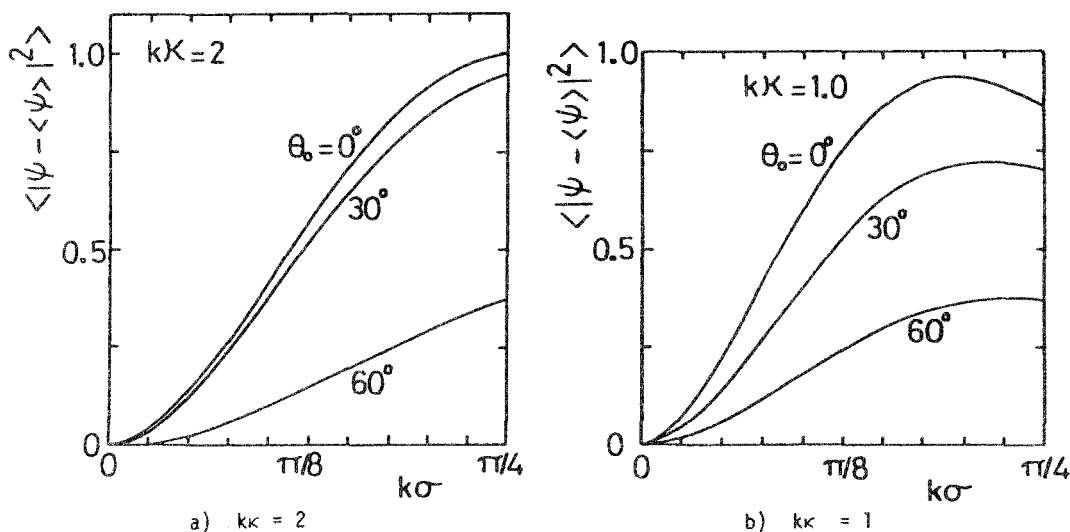


図 3.5 散乱波の分散 (θ_0 : 入射角, κ : 相関距離)

が成立することがわかる。この左辺は単位表面に入射する電力，右辺第一項はコヒーレント反射電力，級数部はインコヒーレント散乱の電力である。図 3.6 と図 3.7 は，光学定理を描いたものである。ここでは，インコヒーレント散乱の電力は $A_1(\lambda)$ のみによって求め， A_2 以上の高次項を無視した。図 3.6 は，電力の関係を表面粗さ $k\sigma$ の関数として書いたものである。 $k\sigma$ が増加すると，コヒーレント散乱電力（図の曲線 a）は減少し，逆にインコヒーレント散乱電力（曲線 b）は増加する。全散乱電力（曲線 c，a と b の和）と入射電力（直線 d）との差は，近似による電力誤差を示す。この誤差は，相関距離が大きい $k\kappa = 2$ では，入射電力の約 3% と小であるが， $k\kappa = 1$ では $k\sigma$ の増加とともに増加している。

図 3.7 は，電力の相対値を入射角 θ_0 の関数として書いたものである。コヒーレント散乱電力（曲線 a）とインコヒーレント散乱電力（曲線 b）は，入射角とともに大きく変化するが，全散乱電力（曲線 c）の変化は比較的少ない。 $k\kappa = 2$ の図 a では，電力誤差は 3% 以内で小さいが， $k\kappa = 1$ （図 b）では約 10% と大きくなっている。これは， $A_1(\lambda)$ のみを用い，高次項を無視したため，インコヒーレント散乱電力が過小に評価されていることを示す。本来 A_2 からの寄与である r' を考慮して A_1 を補正したにもかかわらず，インコヒー

レント散乱電力の A_2 項を無視したことが直接の原因と考えられる。実際、表 3.1 が示す様に $k\kappa$ が小であるほど r' が増加し、電力誤差も増加している。

以上のことから、前節の近似解は、表面の粗さが小さく ($k\sigma < \pi/8$)、かつ、表面の傾きも小さい ($k\kappa \geq 2$) ではよい近似解を与えるものと言えよう。

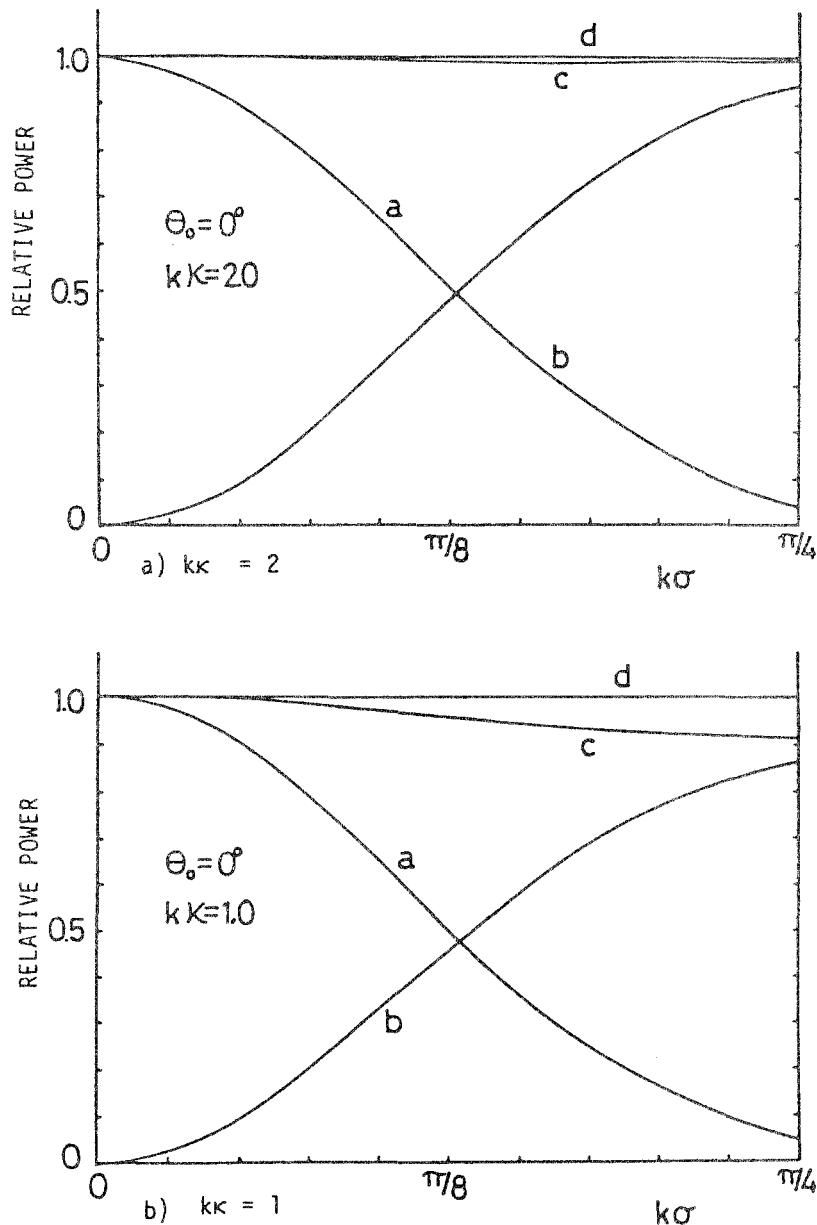


図 3.6 光学定理 (表面粗さ依存性)

a : コヒーレント反射電力, b : インコヒーレント散乱電力,
c : 全散乱電力 (a と b の和) d : 入射電力

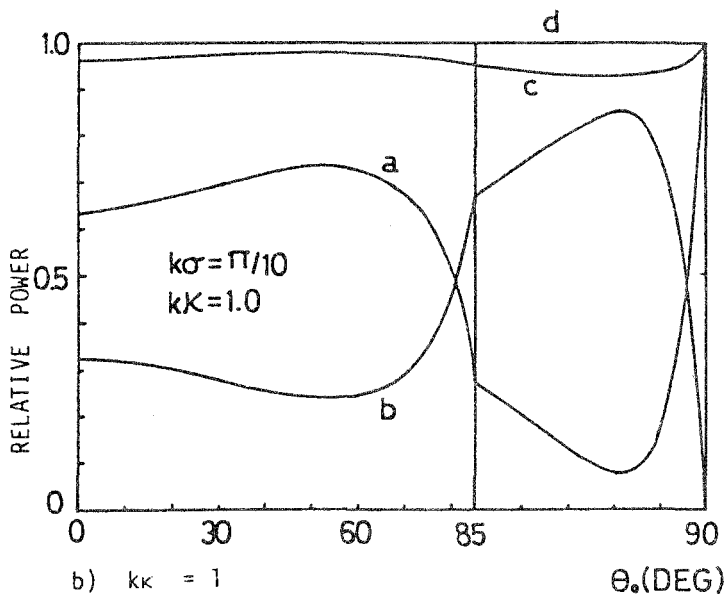
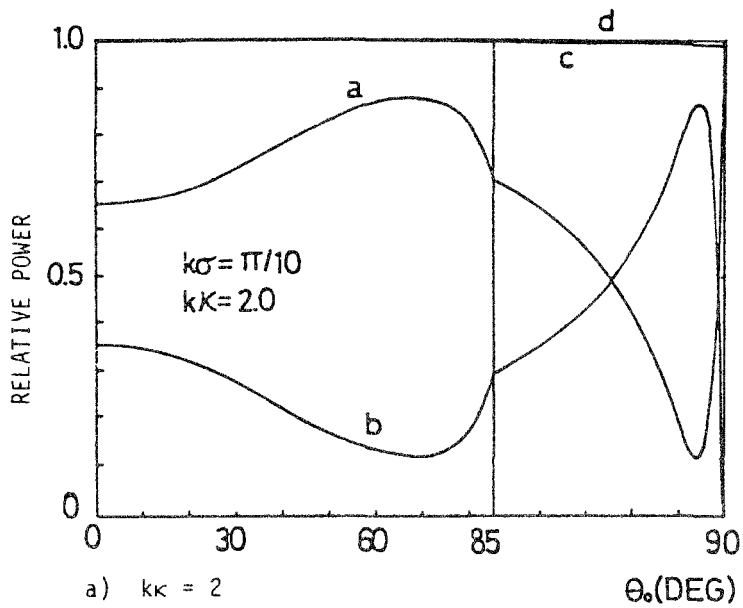


図 3.7 光学定理 (入射角依存性)

a : コヒーレント反射電力, b : インコヒーレント散乱電力

c : 全散乱電力 (a と b の和), d : 入射電力

E. インコヒーレント散乱の角度分布

(2.77)と(3.39)により，インコヒーレント散乱の角度分布は，

$$S(\theta, \theta_0) \simeq k^3 |2 + A_0|^2 \frac{\cos^2 \theta [1 - \sin \theta \sin \theta_0]^2}{|\cos \theta + r'|^2} |F(k \sin \theta - k \sin \theta_0)|^2 \quad (3.47)$$

となる。(3.41)を用いてこの右辺を計算した結果が図3.8である。この図の大きな特徴は， $\theta \simeq \pi/2$ において鋭いピークが現われることである。 $|A_1(\lambda)|$ は，Rayleigh波数 $k_z(\lambda) = k \cos \theta = 0$ において異常に大きくなるが， $d\lambda$ から $d\theta$ への測度の変換(2.76)が因子 $\cos \theta$ をもつので， $S(\theta, \theta_0)$ は $\theta = \pi/2$ で零となり，ピークは $\theta \simeq \pi/2$ で現われることになる。

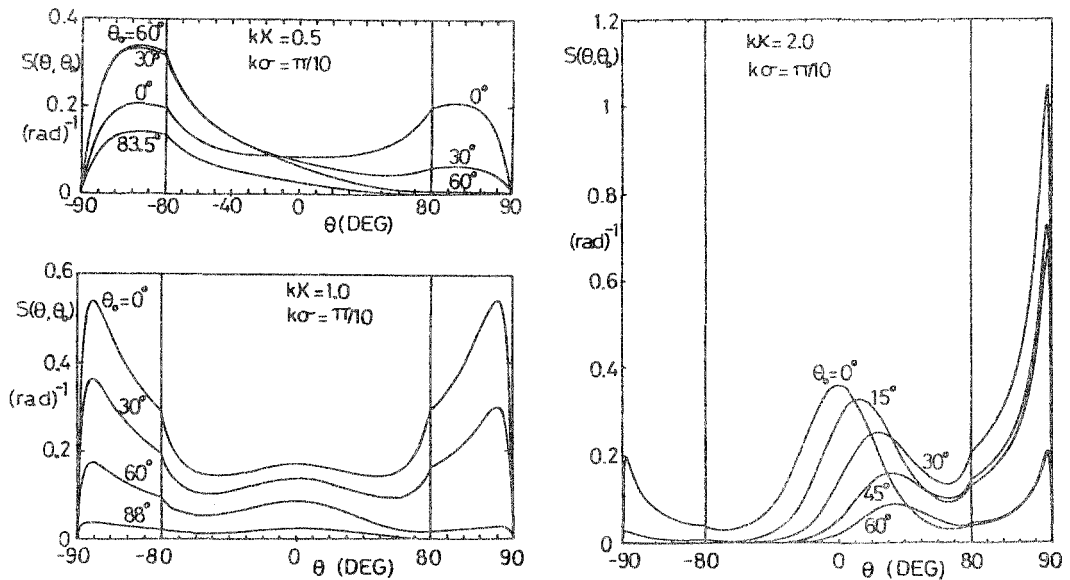


図 3.8 インコヒーレント散乱の角度分布 (θ : 散乱角, κ : 相関距離)

F. 単位面積あたりの散乱断面積

単位面積あたりの散乱断面積は，(2.80)と(3.47)により

$$\sigma^0(\theta | \theta_0) \simeq 2\pi |2 + A_0|^2 k^3 \frac{\cos^2 \theta [1 - \sin \theta \sin \theta_0]^2}{|\cos \theta + r'|^2} |F(k \sin \theta - k \sin \theta_0)|^2 \quad (3.48)$$

と書ける。後方 ($\theta = -\theta_0$) での散乱断面積を $\sigma^B(\theta)$ と書けば, (3.48) により

$$\sigma^B(\theta) = \sigma^0(\theta | -\theta) \simeq 2\pi |2 + A_0|^2 k^3 \frac{\cos^2 \theta [1 + \sin^2 \theta]^2}{|\cos \theta + r'|^2} |F(2k \sin \theta)|^2 \quad (3.49)$$

となる。ここで, $|F(\lambda)|^2$ は λ に関して偶関数であること, あるいは (3.1) を用いた。図 3.9 は, $\sigma^B(\theta)$ を書いたものである。定義により $\sigma^B(\theta)$ は無次元の数であるから, 図の縦軸は対数 (デシベル) で表示した。 θ が小さいところでは, 0 dB をこえることがある。これは, 等方散乱のとき 0 dB となる様に, 散乱断面積を定義したためである。

1 次摂動解は, (3.39) において $A_0 = r' = 0$ に対応するので, 散乱波の分散やインコヒーレント散乱の角度分布などは発散する。しかし, 散乱断面積だけは, 摂動解によっても発散することなく有限値で求められる。

実際, (3.49) において $A_0 = r' = 0$ とすれば,

$$\sigma^B(\theta) \simeq 8\pi k^3 [1 + \sin^2 \theta]^2 |F(2k \sin \theta)|^2 \quad (3.50)$$

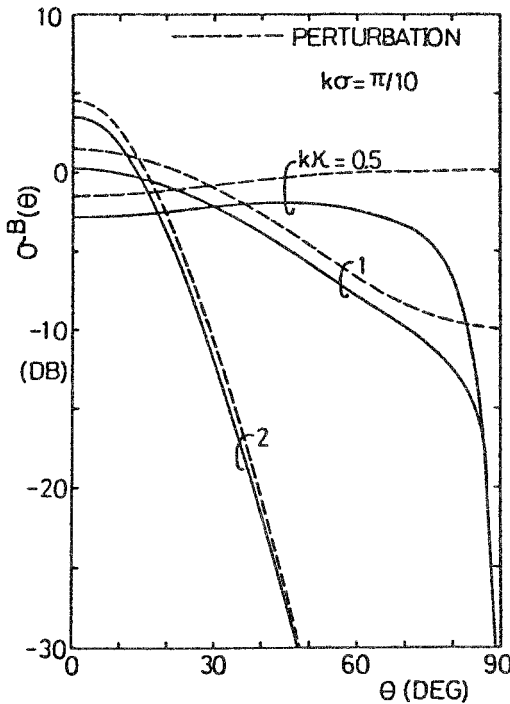


図 3.9 後方散乱断面積
〔実線: (3.49), 破線: (3.50)〕

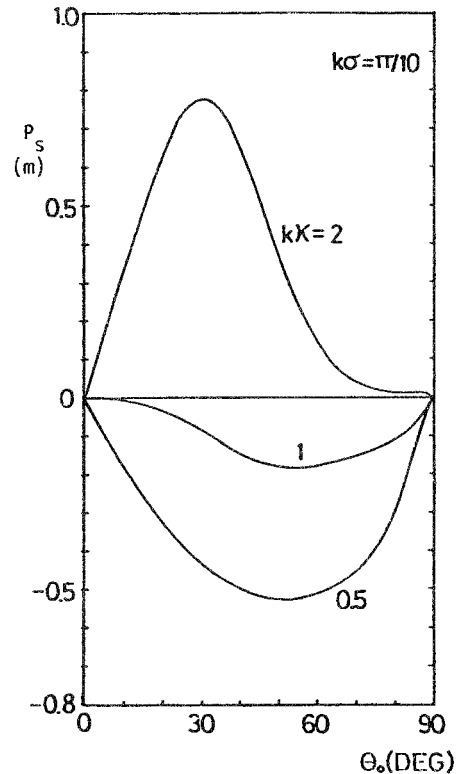


図 3.10 表面波の平均電力流

となる。入射角 θ_0 が小さいときには、 A_0 は小さく、分母の r' の影響も少ないので、我々の (3.49) と (3.50) との差は少ない。しかし、(3.50) では、 $\sigma^B(\pi/2) > 0$ であり、(2.81) の要請を満たさないが、(3.49) では、 $|2+A_0|^2$ と $\cos^2 \theta$ がいずれも零となるため、常に $\sigma^B(\pi/2) = 0$ となる。

G. 表面波の流れ

(2.86) に (3.39) を代入すれば、表面波電力流の平均値

$$P_s \simeq |2+A_0|^2 \int \frac{(K_0+\lambda)(\lambda K_0-K_z)^2}{2k\sqrt{(K_0+\lambda)^2-k^2}} \frac{|F(\lambda)|^2}{|k_z(\lambda)+kr'|^2} d\lambda \quad (3.51)$$

が得られる。 P_s は、 z 軸の正の部分を通る表面波の平均電力である。数値計算の結果を図 3.10 に示す。相関距離が小さい ($k\kappa = 0.5, 1$) とき入射と逆の方向へ表面波電力が流れ、 $k\kappa = 2$ では入射の方向へ流れることを示す。このように逆方向へ表面波が流れることの物理的理由は明らかではない。

$\theta_0 = 0, \pi/2$ のとき、 $P_s = 0$ となるのは前章の結果 (図 2.8) と同じである。

3.5 表面波モード

第 2 章のディリクレ条件の場合 (TE 波の場合) とは異なり、ノイマン条件 (TM 波) の場合には異常散乱が生ずることを導いた。この節では、異常散乱の原因となる表面波モードについて考察する。前節までの表面波 (エバネセント波) は、入射平面波で励振された結果として現われたが、この節で考える表面波モードは、不規則表面上の固有伝搬モードである。

通常、完全導体平面による平面電磁波の反射は、入射平面波と反射平面波の線形結合によって解かれる。しかし、Rayleigh 波数をもつ波 (電界)

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \exp[\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}], \quad (3.52)$$

は、波動方程式と $z = 0$ での境界条件

$$\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z = 0, \quad (z=0)$$

を満たす自由伝搬モードである。この章での波動関数 $\psi(z, \mathbf{x}, \omega)$ は磁界の y 成分 H_y であるから、(3.52) は、

$$\psi(z, \mathbf{x}) = \exp[\pm i\mathbf{k}\mathbf{x}], \quad (3.53)$$

に対応する。(図 3.11 参照)

表面が変形し平坦でなくなれば、(1) Rayleigh 波数をもつ自由伝搬モード (3.53) と他の波数をもつ散乱波との結合・相互作用が発生し、(2) 自由伝搬モードは、表面の凹凸により散乱されるので、伝搬とともに減衰する不安定なモ

ード（表面波モード）
になる，と予想される。

このことから，(3)散乱
問題における Rayleigh
波数をもつ波は，表面
波モードの影響のため
異常に大きな振幅をも
ち，結果として

Anomaly を生じる，
(4)入射電界が E_y 成分
のみをもつ TE 波入射
の場合には，表面波モ
ードとの結合を生じな

いので，Anomaly は現われない，と推定される。

以上の予想の下で，表面波モードを求めよう。表面波モードを $\Phi(z, x, \omega)$
と書く。散乱問題の場合とは異なり入射波は存在しないので，(3.13)を変形
して，

$$\Phi(z, x, \omega) = e^{iK_0 x} U(z, T^x \omega) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} &= A_0 e^{iK_0 x + iK_z z} + e^{iK_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\lambda) e^{i\lambda x + i k_z(\lambda) z} dB(\lambda) \\ &+ e^{iK_0 x} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)x + i k_z(\lambda_1 + \lambda_2) z} h^{(2)}_1 [dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

と書くことにする。この右辺が波動方程式を満たすので，

$$\begin{aligned} K_0^2 + K_z^2 &= k^2 \\ (K_0 + \lambda)^2 + k_z^2(\lambda) &= k^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

等が成立する。散乱問題の場合とは異なり，波数 (K_0, K_z) は求めるべき未知
数である。(3.55)を(3.1)とともに境界条件(3.9)へ代入し，(A112)
(A113)を用いると係数 $A_0, A_1(\lambda), A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ 等に関する連立方程式が得られ
る。すなわち，

$$iK_z A_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} [k^2 - (K_0 + \lambda)K_0] F^*(\lambda) A_1(\lambda) d\lambda = 0, \quad (3.57)$$

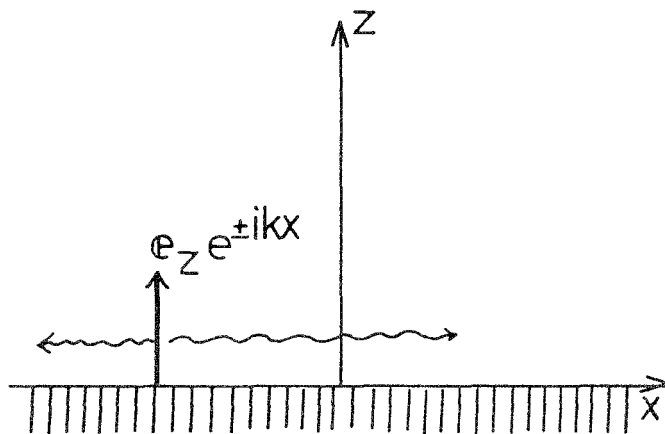


図 3.11 完全導体平面上の自由伝搬モード

$$i k_z(\lambda) A_1(\lambda) - A_0(K_z^2 - \lambda K_0) F(\lambda) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda(K_0 + \lambda + \lambda_1) + k_z^2(\lambda + \lambda_1)] F^*(\lambda_1) A_2(\lambda_1, \lambda) d\lambda_1 = 0, \quad (3.58)$$

$$i k_z(\lambda + \lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) + \frac{1}{2} [\lambda(K_0 + \lambda_1) - k_z^2(\lambda_1)] A_1(\lambda_1) F(\lambda) + \frac{1}{2} [\lambda_1(K_0 + \lambda) - k_z^2(\lambda)] A_1(\lambda) F(\lambda_1) \quad (3.59)$$

$$- 3 \int_{-\infty}^{+\infty} [k_z^2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda)] A_3(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) F^*(\lambda_2) d\lambda_2 = 0$$

等である。これらを(3.21)～(3.23)と比較すると、(3.58)の A_0 を $(2 + A_0)$ とすれば、同じ式であることがわかる。このため、(3.28)において $(2 + A_0)$ を A_0 と書き換えれば、 $A_1(\lambda)$ の近似解が得られ、

$$A_1(\lambda) \simeq i \frac{A_0(\lambda K_0 - K_z^2)}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} F(\lambda) = -i A_0 \frac{[k^2 - K_0(K_0 + \lambda)]}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} F(\lambda) \quad (3.60)$$

となる。ここで、 $r(\lambda)$ は(3.29)で与えられる。(3.60)を(3.57)へ代入すれば、

$$A_0 \left\{ K_z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda) K_0]^2}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \right\} = 0 \quad (3.61)$$

を得る。係数 A_0 が零でない解をもつためには、

$$K_z = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - (K_0 + \lambda) K_0]^2}{k_z(\lambda) + k r(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.62)$$

でなければならない。これは、 K_z を定める分散方程式である。一方、 A_0 は、固有値問題であるため不定である。

(3.62)と(3.35)を比較すれば、

$$Z_s = -1 \quad (3.63)$$

であることがわかる。散乱問題の見方をすれば、(3.63)は反射係数(3.36)が発散する条件である。すなわち、入射平面波が存在しなくとも、コヒーレント反射波が存在する条件となっている。(3.62)は逆に、入射波が存在するとき、コヒーレント反射波が消える条件とも解釈できる。このとき、(3.55)右辺第一項の K_z を $-K_z$ と書くので、(3.62)右辺の負の符号は消え、 $Z_s = 1$ となる。これが、図3.4におけるコヒーレント反射振幅のディープの原因である。

(3.62)を近似的に解いて伝搬定数(K_0, K_z)を求めよう。微量 $r(\lambda)$ を

無視すれば、(3.62) は次式で近似される。

$$K_z \simeq - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[k^2 - K_0(K_0 + \lambda)]^2}{k_z(\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.64)$$

この右辺は σ^2 オーダーの微小量であるので、(3.56) により $K_0 \simeq \pm k$ である。

そこで、 $K_0 = \pm k$ と置いて右辺の積分を評価すれば、

$$K_z \simeq -k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 |F(\lambda)|^2}{\sqrt{k^2 - (k \pm \lambda)^2}} d\lambda = -kr' \quad (3.65)$$

となる。ここで r' は (3.38) で定義された複素数である。計算を見やすくするため、

$$r' = \alpha - i\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (3.66)$$

と置けば、 α と β はともに正数である (表 3.1 参照)。以上より、伝搬定数 (K_0, K_z) の近似値は、

$$\begin{aligned} K_0 &\simeq \pm k \{ 1 - (\alpha^2 - \beta^2)/2 + i\alpha\beta \} \\ K_z &\simeq -k\alpha + i k\beta \end{aligned} \quad (3.67)$$

となる。この複号は $\pm x$ 方向へ伝搬する波に対応する。次に、コヒーレント部分 $\langle \Phi(z, x, \omega) \rangle$ の等位相面、等振幅面を求めよう。(3.55) を平均して、(3.67) を用いれば、(x 方向へ伝搬するとして)

$$\langle \Phi(z, x, \omega) \rangle = A_0 \exp \{ ik [1 - (\alpha^2 - \beta^2)/2 + i\alpha\beta]x - ik(\alpha - i\beta)z \} \quad (3.68)$$

となり、 z 方向に減衰し、 x 方向へも減衰することがわかる。(3.68) より等位相面の方程式は、

$$z = \frac{2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} x + \frac{2\pi n}{k\alpha} \simeq \frac{x}{\alpha} + \frac{2\pi n}{k\alpha}, \quad (3.69)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となり、右上がりの直線群となる。一方、等振幅面は、

$$z = -\alpha x + \text{Const} \quad (3.70)$$

となり、等位相面に直交する (図 3.12 参照)。

次に、表面波モードのインコヒーレント部分について考えよう。(3.60) の極は、

$$k_z(\lambda) + kr(\lambda) = 0 \quad (3.71)$$

によって決まる。これを解けば、近似的に

$$\begin{aligned} k_z(\lambda) &\simeq -kr' = -k\alpha + i\beta k \\ K_0 + \lambda &\simeq \pm k [1 - (\alpha^2 - \beta^2)/2 + i\alpha\beta] \end{aligned} \quad (3.72)$$

となる。これは、(3.67)と物理的には全く同じ式であり、いずれも Rayleigh 波数 $K_z=0$, $k_z(\lambda)=0$ とわずかに異なる位置に表面波モードの極ができることを示す。(3.72)は、(3.28)の極でもあるから、インコヒーレント散乱が図 3.8 のように異常性をもつのは、表面波モードの影響であると考えられる。

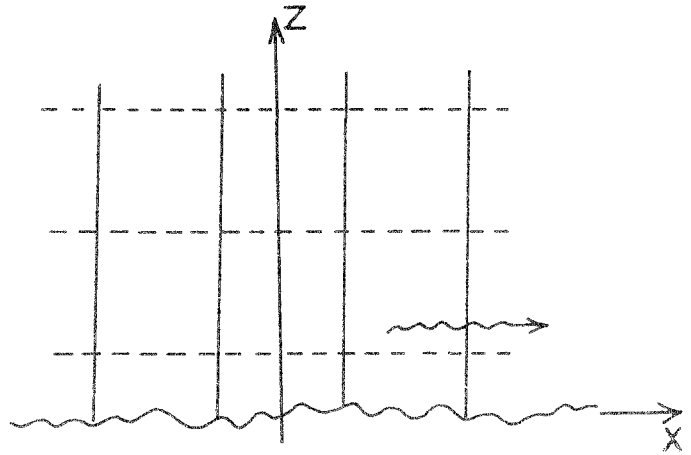


図 3.12 表面波モードの平均値
(実線：等位相面，破線：等振幅面)

コヒーレント部分の等位相面が z 軸に平行ではないので、不規則表面への電力の流れが存在する(図 3.12)。表面には損失がないので、この入射電力はインコヒーレント散乱により z 方向への電力に変換されるはずである。このことを見るために、図 3.13 の箱領域を考える。箱の左辺から入射する電力を P_{in} 、上辺から出ていく電力を P_{scatt} 、右辺から出る電力を P_{out} と書き、それぞれ次式で定義する。

$$P_{in} = \frac{1}{k} \int_0^{Z_0} \text{Im} \left\{ \Phi^*(z, 0, \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\} dz \quad (3.73)$$

$$P_{out} = \frac{1}{k} \int_0^{Z_0} \text{Im} \left\{ \Phi^*(z, \ell, \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\ell} \right\} dz \quad (3.74)$$

$$P_{scatt} = \frac{1}{k} \int_0^{\ell} \text{Im} \left\{ \Phi^*(Z_0, x, \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=Z_0} \right\} dx \quad (3.75)$$

これらは、いずれもランダム量であるため、各電力の平均値を計算することにする。(3.55)を用いれば、

$$\langle P_{in} \rangle \simeq |A_0|^2 \int_0^{Z_0} e^{-2k\beta z} \left[1 + \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(K_0 + \lambda)}{k} |A_1(\lambda)|^2 e^{-2\text{Im} k_z(\lambda)z} d\lambda \right] dz \quad (3.76)$$

$$\langle P_{out} \rangle \simeq |A_0|^2 e^{-2\alpha\beta k\ell} \langle P_{in} \rangle \quad (3.77)$$

が成立する。(3.76)における λ に関する積分は 1 に比べて小さいので、これ

を無視すれば，近似的に

$$\lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \langle P_{in} \rangle \simeq \frac{|A_0|^2}{2k\beta} \quad (3.78)$$

$$\lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \langle P_{out} \rangle \simeq \frac{|A_0|^2}{2k\beta} e^{-2\alpha\beta k\ell} \quad (3.79)$$

が成立する。同様に，

$$\begin{aligned} \langle P_{scatt} \rangle \simeq & |A_0|^2 \int_0^\ell e^{-2\alpha\beta kx} \left[-\alpha e^{-2k\beta Z_0} \right. \\ & \left. + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_z(\lambda)}{k} |A_1(\lambda)|^2 e^{-2\operatorname{Im}k_z(\lambda)Z_0} d\lambda \right] dx \end{aligned} \quad (3.80)$$

となる。 $Z_0 \rightarrow \infty$ では，右辺〔 〕内の第一項は消えるから

$$\lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \langle P_{scatt} \rangle \simeq \frac{1}{2\alpha\beta k^2} \{ 1 - e^{-2\alpha\beta k\ell} \} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} k_z(\lambda) e^{-2\operatorname{Im}k_z(\lambda)Z_0} |A_1(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.81)$$

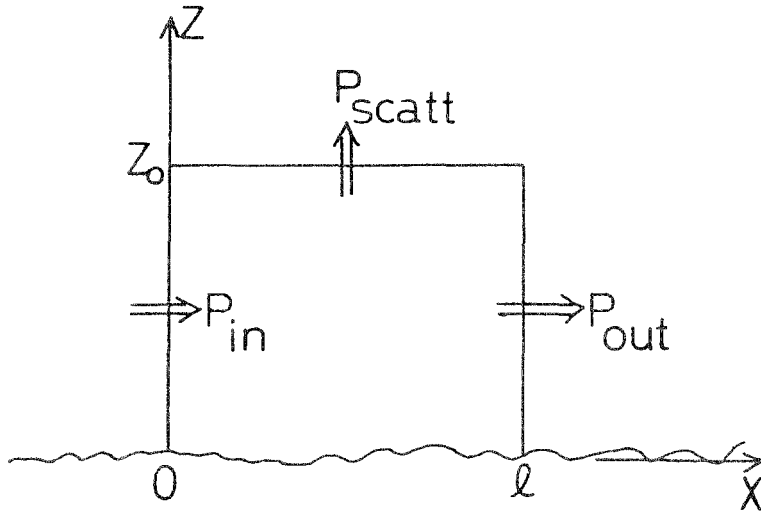


図 3.13 P_{in} , P_{out} , P_{scatt} の定義

となる。(3.60)を代入すれば，右辺の積分項は，

$$|A_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} k_z(\lambda) \frac{|k^2 - (K_0 + \lambda)K_0|^2}{|k_z(\lambda) + k r(\lambda)|^2} |F(\lambda)|^2 e^{-2Z_0 \operatorname{Im}k_z(\lambda)} d\lambda \quad (3.82)$$

となる。ここで， $K_0 = k$ とおき，分母の $r(\lambda)$ を無視すれば，(3.82)は，近似的に次式に等しい。

$$k^2 |A_0|^2 \int \frac{\lambda^2 |F(\lambda)|^2}{\sqrt{k^2 - (k + \lambda)^2}} d\lambda = k |A_0|^2 \operatorname{Re}(r') = k |A_0|^2 \alpha, \quad (3.83)$$

従って、結局 (3.81) は、

$$\lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \langle P_{\text{scatt}} \rangle \simeq \frac{|A_0|^2}{2\beta k} \{ 1 - e^{-2\alpha\beta k \ell} \}, \quad (3.84)$$

となる。(3.78)(3.79)と(3.84)により、

$$\langle P_{\text{in}} \rangle = \langle P_{\text{out}} \rangle + \langle P_{\text{scatt}} \rangle \quad (3.85)$$

が成立することがわかる。すなわち、 x 方向へのコヒーレント波の減衰は、インコヒーレント波によるエネルギーの散逸によって起こる。

完全導体の不規則表面上の表面波モードは、以下の様に考えることもできる。インコヒーレント散乱によりコヒーレント波のエネルギーは伝搬とともに消滅する。これをコヒーレント部分から見れば、完全導体の表面はエネルギーをうばう不完全導体平板として働くことになり、Zenneck の表面波と類似の表面波として存在しうる。

次に、表面波モードを定義することの困難性について述べる。(3.82)の積分を評価するために行った近似は、(3.60)分母の $r(\lambda)$ を無視することに等しい。このとき、(3.60)は1次の摂動解と一致することになり、インコヒーレント波の分散が発散することになる。そこで、 $r(\lambda)$ を無視せずに、(3.82)を評価すれば、エネルギー保存則(3.85)が成立しないことになる。また、近似を上げるため、(3.67)で求めた複素数の K_0 を用いて(3.82)を評価すれば、 $Z_0 \rightarrow \infty$ とともに、指数因子が零となるか、発散することが予想される。このような困難を解決するためには、新しい解析上の工夫が必要であるように思われる。

従来の理論により(3.65)と等価な分散方程式が導かれた例はあるが、表面波モードをインコヒーレント部分をも含めて計算できた例はないようである⁽²⁵⁾
(54)。

3.6 考 察

前章 2.2 節では、表面の確率論的一様性を仮定して、解の形(2.20)を導いた。この解の形は、表面粗さ σ が存在するときのみ有効で、 $\sigma \rightarrow 0$ となり不規則表面が平坦面となる極限においては成立する保障はない。同様に、表面の周期的凹凸が零となる極限においては、Floquet の解も有効である保障はない。

何故なら、表面の確率論的一様性や周期性の仮定そのものが、この極限において消滅するからである。このため、 $\sigma \rightarrow 0$ における波動関数の収束は、特異なものとなりうる。

たとえば、コヒーレント反射係数 $(1+A_0)$ に対しては、極限をとる順序が問題となる。(3.36)(3.37)から容易に導けるように、

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} A_0 = -2 \quad (3.86)$$

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} A_0 = 0 \quad (3.87)$$

が成立し、2つの極限は可換ではない。入射角 θ_0 が $\pi/2$ となるとき、 $K_0 \rightarrow k$ 、 $K_z \rightarrow 0$ となるから、(3.86)の場合

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} \langle \psi(z, x, \omega) \rangle &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} e^{iK_0 x} \left[e^{-iK_z z} + (1+A_0) e^{iK_z z} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

となり、一方、(3.87)の場合

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \langle \psi(z, x, \omega) \rangle = 2 e^{i k x} \quad (3.89)$$

となる。〔第2章のディリクレ条件の場合、収束は一意的である。〕

このように解の一意性が極限において成立しない原因を、次に考えよう。数学的には、体積と表面積がともに有界な散乱体に対しては散乱問題の一意性の定理が証明されているが、無限平面の問題に対しては証明は与えられていない。〔しかし、多くの無限平面の問題では解は一意的に定まるという経験的事実がある〕。これは、有限の散乱体では遠方の概念が明確であるのに対し、図3.1の無限平面の場合には、 $|x| \rightarrow \infty$ での遠方の概念が不明確で、一意性を保障する放射条件の使用法があいまいであるためである。実際、Rayleighの仮説の場合、 $z \rightarrow \infty$ における放射条件は用いるが、 $|x| \rightarrow \infty$ における放射条件は考慮されていないことを指摘しておきたい。

第四章 二次元不規則表面によるスカラー波の散乱

4.1 ま え が き

第二章及び第三章では、確率論を背景とする解析法により1次元不規則表面によるスカラー波の散乱を定式化した。強定常確率過程である1次元不規則表面に平面波が入射するとき、波動関数が指数関数と未知の強定常過程の積で表現できることを示した。次に、不規則表面がガウス過程であると仮定して、未知の強定常過程をウィナー展開により表現し、境界条件を解いてその展開係数を求めた。この方法で得た波動関数は、確率過程として表現されているので、希望する統計的散乱特性を平均操作により定式化できる利点がある。実際、コヒーレント散乱振幅、光学定理、インコヒーレント散乱の角度分布などをこの方法により定式化し、表面粗さが小さい場合の数値例をも示した。

この様な定式化は、二次元不規則表面の場合に容易に拡張することができる。次節では、二次元不規則表面が無限に広く、かつ強義の一樣確率場であると仮定すれば、平面波入射に対する散乱波が指数関数と未知の一樣確率場の積で書けることを示す。従って、問題は未知の一樣確率場を不規則表面の汎関数として求めることに帰着する。第二章と同様、表面粗さが十分小さいガウス不規則表面を仮定し、求めるべき一樣確率場をウィナー展開により表現する。第二章のウィナー展開が1次元の複素ガウスランダム測度により展開されていたのに対し、ここでは二次元複素ガウスランダム測度により展開される。次に、境界条件に関する自乗平均誤差が零となる条件より、ウィナー展開の展開係数が満たすべき方程式を導き、この方程式を近似的に解いて展開係数を求める。

4.4節では、このように求めた近似解を用いて、種々の散乱特性を具体的に計算する。コヒーレント散乱振幅や光学定理、インコヒーレント散乱の角度分布、表面波の平均電力流についての数値例を図示している。本章での近似解は、光学定理を満足するので、近似解析の有効性を見るため境界条件に関する誤差を計算している。その結果、表面粗さが入射波長に比べて十分小さければ、境界条件に関する誤差は小さいことが明らかになった。

本章で求めた近似解は、Bass-Fuks⁽⁵⁴⁾、Freilikher⁽⁹⁵⁾が別の方法で求めた近似解と一致している。この意味で新しいものではないが、種々の散乱特性を具体的に得ている点に、本章の結果は意義がある。

4.2 波動関数の形

無限に広い不規則表面にスカラー平面波が入射するものとする(図4.1)。二次元平面 $R^2 = (-\infty \leq x, y \leq \infty)$ 上の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y)$ と書き、確率を定義する見本空間 Ω 内の見本点を ω で表わす。不規則表面は、強義の一樣・等方確率場 $f(\mathbf{r}, \omega)$ により

$$z = f(\mathbf{r}, \omega) \quad (4.1)$$

と表現されるものとする。一樣確率場は、移動 $f(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow f(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \omega)$ により確率分布は変化しないから、(2.2)と同様 Ω 内の保測変換 $T^{\mathbf{r}}$ により

$$z = f(\mathbf{r}, \omega) = f(0, T^{\mathbf{r}}\omega) = f(T^{\mathbf{r}}\omega) \quad (4.2)$$

と書くことができる。ここで、 $T^{\mathbf{r}}$ は1パラメータ群の性質

$$T^0 = 1 \quad (\text{恒等式})$$

$$T^{\mathbf{a}} T^{\mathbf{b}} = T^{\mathbf{a} + \mathbf{b}}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2) \quad (4.3)$$

をもつ。さらに、 $f(T^{\mathbf{r}}\omega)$ はエルゴード性をもつと仮定し、

$$\langle f(T^{\mathbf{r}}\omega) \rangle = 0$$

$$\langle f^2(T^{\mathbf{r}}\omega) \rangle = \sigma^2 \quad (4.4)$$

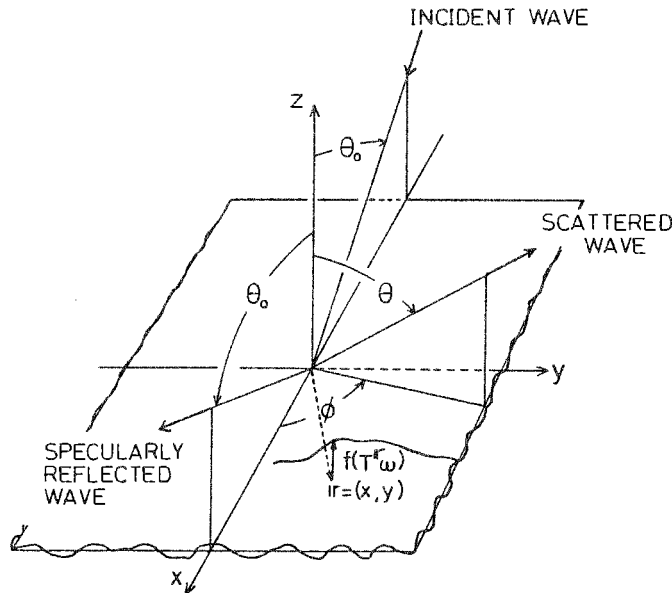


図 4.1 二次元不規則表面によるスカラー波の散乱
(θ_0 :入射角, (θ, ϕ):散乱角)

とする。ここで、 $\langle \rangle$ は確率平均を示す記号である。 σ は表面粗さの実効値で長さの次元をもつ。

波動関数 $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ は、自由空間 $z > f(\mathbf{r}, \omega)$ において、波動方程式

$$\begin{aligned} & [\nabla^2 + k^2] \psi(z, \mathbf{r}, \omega) = 0, \\ & \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

を満たし、不規則表面 (4.1) の上でディリクレ条件

$$\psi(z, \mathbf{r}, \omega) = 0; \quad (z = f(\mathbf{r}, \omega)) \quad (4.6)$$

を満たすとする。表面粗さが波長に比べて十分小であるとき、この条件は、次式で近似できる。

$$\psi(0, \mathbf{r}, \omega) + f(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial \psi(z, \mathbf{r}, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.7)$$

これは、(2.7) を二次元へ拡張したものである。

不規則表面 (4.2) が、 \mathbf{r} と ω の同時移動

$$(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow (\mathbf{r} + \mathbf{a}, T^{-\mathbf{a}} \omega)$$

に関して不変であることに注目して、移動変換の作用素 D を次式で定義する。

$$D^{\mathbf{a}} \psi(z, \mathbf{r}, \omega) = \psi(z, \mathbf{r} + \mathbf{a}, T^{-\mathbf{a}} \omega), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.8)$$

(4.2) (4.8) により、 $D^{\mathbf{a}}$ は加法群の性質

$$D^0 = 1 \text{ (恒等式)}, \quad D^{\mathbf{a}} D^{\mathbf{b}} = D^{\mathbf{a} + \mathbf{b}}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2) \quad (4.9)$$

をもつ。これは、一次元の (2.10) を二次元へ拡張したものである。定義により、 $D^{\mathbf{a}}$ は ∇^2 と $f(\mathbf{r}, \omega)$ と可換である。従って、 $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ が (4.5) (4.7) を満たせば、 $D^{\mathbf{a}} \psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ もこれらを満たす。そこで $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ と $D^{\mathbf{a}} \psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ は、線形の関係

$$D^{\mathbf{a}} \psi(z, \mathbf{r}, \omega) = C(\mathbf{a}, \omega) \psi(z, \mathbf{r}, \omega) \quad (4.10)$$

をもっと仮定する。

(4.9) により $C(\mathbf{a}, \omega)$ は次の関係式を満たす。

$$C(0, \omega) = 1, \quad C(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \omega) = C(\mathbf{a}, \omega) C(\mathbf{b}, T^{-\mathbf{a}} \omega) \quad (4.11)$$

さらに、 $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ が、入射平面波 $\psi_i(z, \mathbf{r})$ と散乱波 $\psi_s(z, \mathbf{r}, \omega)$ の和

$$\psi(z, \mathbf{r}, \omega) = \psi_i(z, \mathbf{r}) + \psi_s(z, \mathbf{r}, \omega) \quad (4.12)$$

であると仮定し、

$$\begin{aligned}\psi_i(z, \mathbf{r}) &= \exp(i\mathbf{K}_0 \mathbf{r} - iK_z z), \\ \mathbf{K}_0 &= K_0 \mathbf{e}_x = k \sin \theta_0 \mathbf{e}_x, \\ K_z &= \sqrt{k^2 - K_0^2} = k \cos \theta_0 > 0,\end{aligned}\quad (4.13)$$

と置く。但し、入射面を xz 面とし、入射角を θ_0 と書いた (図 4.1)。(4.12) が (4.10) を満たすためには、 D^a の下で $\psi_s(z, \mathbf{r}, \omega)$ は $\psi_i(z, \mathbf{r})$ と同じ変換性をもたなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned}D^a \psi_i(z, \mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \psi_i(z, \mathbf{r}) \\ D^a \psi_s(z, \mathbf{r}, \omega) &= e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \psi_s(z, \mathbf{r}, \omega), \\ C(\mathbf{a}, \omega) &= e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}}\end{aligned}$$

でなければならない。このことから、 $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ が次の形をもつことが容易に導ける。

$$\psi(z, \mathbf{r}, \omega) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} \left\{ e^{iK_z z + U_s(z, T^r \omega)} \right\} \quad (4.14)$$

$$U_s(z, T^r \omega) = \psi_s(z, 0, T^r \omega) \quad (4.15)$$

これは、(2.20) を二次元表面へ拡張したものである。(4.14) の指数因子は D^r の固有値 $C(\mathbf{r}, \omega)$ で位相を表す。括弧の因子は、 z を固定したとき、保測変換 T^r により生成された一様確率場 $U(z, T^r \omega)$ と定数 $\exp(iK_z z)$ との和である。従って、(4.14) は、波動関数が指数関数と一様確率場の積に書けることを示す。これは、不規則表面の確率的一様性の反映であると考えられる。

4.3 ガウス不規則表面に対する近似解

前節では、波動関数が指数関数と一様確率場の積に書けることを導いた。このことから、波動関数を決定することは一様確率場を求めることになる。しかし、一般の不規則表面に対して、このような確率場を求めることは困難である。そこで本節では、第二章と同様ガウス不規則表面を仮定し、ウィナー展開により一様確率場を計算することにしよう。

A. 波動関数の表現

ここでは、境界条件 (4.7) を解くので (4.14) を書き換えて

$$\psi(z, \mathbf{r}, \omega) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} \left\{ -e^{-iK_z z} + e^{iK_z z + U(z, T^r \omega)} \right\} \quad (4.16)$$

と置く。右辺括弧内の第一項は入射平面波に、第二項は平坦面 ($\sigma=0$) からの

反射波に対応する。また第三項は不規則性による散乱波に対応し、 r に関して一様確率場であり、以下で求めるものである。

具体的に解析を進めるため、 $f(T^r \omega)$ は二次元複素ランダム測度 $dB(\lambda)$ により生成されたガウス確率場で、ウィナー積分

$$f(T^r \omega) = \int_{R^2} e^{i\lambda^r} F(\lambda) dB(\lambda) \quad (4.17)$$

により表現されると仮定する。ここで、定義 (A 13 1) により、二次元複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda)$ は、性質

$$\left. \begin{aligned} dB^*(\lambda) &= dB(-\lambda) \\ \langle dB(\lambda) \rangle &= 0, \quad \langle dB(\lambda_1) dB^*(\lambda_2) \rangle = \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

をもつ複素ガウスランダム変数である。これは 1 次元の複素ガウスランダム測度と類似の性質であり、(2.3 1) (2.3 2) において形式的な置換

$$\lambda \rightarrow \lambda = (\lambda_x, \lambda_y), \quad d\lambda \rightarrow d\lambda = d\lambda_x d\lambda_y \quad (4.19)$$

を施したものと一致する。(4.17) の $f(T^r \omega)$ を実の等方確率場とするため、条件

$$F(\lambda) = F^*(-\lambda)$$

$$|F(\lambda)|^2 = |F(A)|^2; \quad A = |\lambda| = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \quad (4.20)$$

を課す。(4.17) ~ (4.20) により、 $f(T^r \omega)$ の相関々数は

$$\begin{aligned} C_f(|a|) &= \langle f(T^{r+a} \omega) f(T^r \omega) \rangle \\ &= \int_{R^2} e^{i\lambda a} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^\infty J_0(A|a|) |F(A)|^2 A dA \end{aligned} \quad (4.21)$$

となり、長さ $|a|$ のみの関数でベクトル a の方向によらない。Wiener-Khinchin の定理により $|F(\lambda)|^2$ は不規則表面のパワースペクトルである。また (4.4) (4.21) により $F(\lambda)$ は σ のオーダの微小量である。

後に、エルゴード定理を用いるので、 $|F(\lambda)|^2$ は δ 関数状の線スペクトルをもたない連続関数であると仮定する。このとき、 $f(T^r \omega)$ はエルゴード性を持ち、さらに、 $f(T^r \omega)$ の汎関数である一様確率場 $U(z, T^r \omega)$ も r に関してエルゴード性をもつ。

さて、(4.16) の未知量 $U(z, T^r \omega)$ は $f(T^r \omega)$ の汎関数であるが、(4.17) より $dB(\lambda)$ の汎関数と見なしてウィナー展開する。固定した z の各値に対して $U(z, T^r \omega)$ は (A 15 3) の展開をもつが、散乱波 $e^{iK_0^r} U(z, T^r \omega)$ が波動

方程式を満たすように，ここでは

$$\begin{aligned}
 U(z, T^r \omega) = & A_0 e^{iK_z z} + \int_{R^2} A_1(\lambda) e^{i\lambda r + i k_z(\lambda) z} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\
 & + \iint_{R^2 R^2} A_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)r + i k_z(\lambda_1 + \lambda_2)z} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

と展開する。ここで， $h^{(n)}$ は複素ウィナーエルミット微分式で，性質(A138)～(A141)をもつ。 A_n は，確定値をとる展開係数で，その変数に関して対称な関数である。 λ と λ_1, λ_2 は，不規則表面のブラッグ・ベクトルである。 $k_z(\lambda)$ は，散乱波数ベクトルの z 成分で， $z \rightarrow \infty$ での放射条件を満たすように，

$$k_z(\lambda) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda_x)^2 - \lambda_y^2} \geq 0, \quad (k^2 \geq (K_0 + \lambda)^2) \quad (4.23a)$$

$$= i \sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2}, \quad (k^2 < (K_0 + \lambda)^2) \quad (4.23b)$$

と定義する。(4.23a)は伝搬する平面波に対応し，(4.23b)は $z = \infty$ で消滅する表面波(エバネセント波)に対応する。

複素ウィナーエルミット微分式の直交性(A141)を用いれば，(4.16)(4.22)により，コヒーレント波は

$$\langle \phi(z, r, \omega) \rangle = e^{iK_0 r} \left[-e^{-iK_z z} + (1 + A_0) e^{iK_z z} \right] \quad (4.24)$$

となる。明らかに $\{-(1 + A_0)\}$ は，コヒーレント反射の反射係数である。

B. 展開係数の近似解

A_n が得られると(4.22)により $U(z, T^r \omega)$ が決まり，(4.16)により逆に $\phi(z, r, \omega)$ が得られる。ここでは，展開係数の近似解を計算する。

近似解析の観点から，境界条件に関する誤差 e_b を次式で定義する。

$$e_b(T^r \omega) = e^{-iK_0 r} \left[\phi(0, r, \omega) + f(T^r \omega) \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, r, \omega) \Big|_{z=0} \right] \quad (4.25)$$

(4.16)により， e_b は一様確率場となるから， $e_b(T^r \omega)$ の平均値，分散などの統計量は r に依存しない定数である。そこで $r = 0$ とにおいて，

$\langle |e_b(T^r \omega)|^2 \rangle$ を計算する。(4.16)(4.17)(4.22)を(4.25)に代入し，複素ウィナーエルミット微分式の直交性(A141)と漸化式(A139)を用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}
\langle |e_b(T^r \omega)|^2 \rangle = & |A_0 + i \int_{R^2} k_z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda|^2 \\
& + \int_{R^2} |A_1(\lambda) + i K_z(2+A_0) F(\lambda) + 2i \int_{R^2} k_z(\lambda+\lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) F^*(\lambda_1) d\lambda_1|^2 d\lambda \\
& + 2! \int_{R^2} \int_{R^2} |A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{i}{2} k_z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F(\lambda_2) + \frac{i}{2} k_z(\lambda_2) A_1(\lambda_2) F(\lambda_1) \\
& + 3i \int_{R^2} k_z(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) F^*(\lambda_3) d\lambda_3|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\
& + \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{4.26}$$

となる。右辺の各項は非負であるから、 $\langle |e_b(T^r \omega)|^2 \rangle = 0$ であるためには、各項が全て零でなければならない。このことから、展開係数 A_n に関する連立方程式

$$A_0 + i \int_{R^2} k_z(\lambda) A_1(\lambda) F^*(\lambda) d\lambda = 0, \tag{4.27}$$

$$A_1(\lambda) + i K_z(2+A_0) F(\lambda) + 2i \int_{R^2} k_z(\lambda+\lambda_1) A_2(\lambda, \lambda_1) d\lambda_1 = 0, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
& A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{i}{2} k_z(\lambda_1) A_1(\lambda_1) F(\lambda_2) + \frac{i}{2} k_z(\lambda_2) A_1(\lambda_2) F(\lambda_1) \\
& + 3i \int_{R^2} k_z(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) A_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) F^*(\lambda_3) d\lambda_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

等を得る。これらは、(2.48)~(2.50)を二次元へ拡張したものである。

$F(\lambda)$ が σ のオーダーの微小量であるから、(4.28)により $A_1(\lambda)$ は高々 σ^1 のオーダーとなり、 A_0 と $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ は(4.27)(4.29)により高々 σ^2 のオーダーとなる。(一般に、 A_n は高々 σ^n のオーダーとなることが導ける)。表面の粗さ σ が十分小さい場合を考え、 A_2 以上を無視して近似解を求めよう。 $A_2=0$ とおくと、(4.28)により $A_1(\lambda)$ の近似解

$$A_1(\lambda) \simeq -i(2+A_0) K_z F(\lambda) \tag{4.30}$$

を得る。これを(4.27)に代入して、 A_0 を求めれば、

$$A_0 = -2 \frac{Z_s}{1+Z_s}, \tag{4.31}$$

$$Z_s = K_z \int_{R^2} k_z(\lambda) |F(\lambda)|^2 d\lambda \tag{4.32}$$

となる。(4.31)は(2.56)(3.34)と同じ形である。(4.32)は(2.116)と同じ形であるため、(2.106)と類似の多重散乱効果をもつ。

等価表面インピーダンス Z_s の実部(抵抗分)は、インコヒーレント散乱に

よりコヒーレント反射電力が失われることを表し、一方、 Z_s の虚部（リアクタンス分）は表面波の存在を示唆するものである。(4.30)～(4.32) は、Bass-Fuks の解 (1.56)～(1.59) の2次元版であり、記号の違いを除けば、同じ解である。

次節では、近似解(4.30)～(4.32)を用いて散乱の統計的性質を計算する。

4.4 散乱の統計的性質

散乱の統計的性質を具体的に計算するため、不規則表面のパワースペクトルが、ガウス形

$$|F(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 \kappa^2}{\pi} \exp(-\kappa^2 \lambda^2) \quad (4.33)$$

であると仮定する。ここで κ は相関距離を表すパラメータである。

A. コヒーレント散乱

(4.24)によりコヒーレント散乱の係数は、 $\{-(1+A_0)\}$ である。図4.2は、(4.31)～(4.33)を用いて、 A_0 を入射角 θ_0 の関数として求めたものである。(4.32)により Z_s の実部と虚部は共に正であるから、(4.31)により、 A_0 の実部は常に負である。 Z_s が $K_z = k \cos \theta_0$ に比例するので、水平入射($\theta_0 = \pi/2$)のときは $Z_s = 0$ となり、従って A_0 は零となる。

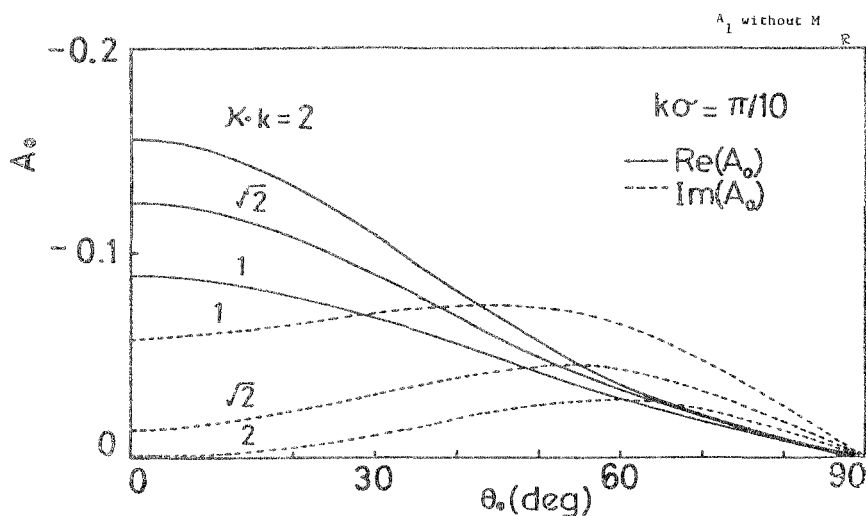


図 4.2 A_0 の入射角依存性 (θ_0 : 入射角)

B. 境界条件に関する誤差

前節の近似解は、波動方程式(4.5)を満たすが、境界条件(4.7)を近似的

に満たすにすぎない。そこで、近似解の精度を見るため、境界条件に関する誤差 $e_b(T^r\omega)$ の自乗平均値を計算しよう。

(4.30) ~ (4.32) を (4.26) に代入し、 $A_2 = A_3 = 0$ とおけば

$$\langle |e_b(T^r\omega)|^2 \rangle$$

$$= |2 + A_0|^2 K_Z^2 \left\{ \sigma^2 \int_{R^2} |k_Z(\lambda) F(\lambda)|^2 d\lambda + \left| \int_{R^2} k_Z(\lambda) |F(\lambda)|^2 d\lambda \right|^2 \right\} \quad (4.34)$$

となる。これは、表面粗さ σ とパワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ の形状、入射角 θ_0 に依存する。この右辺は高々 σ^4 のオーダーであるから、 $\sqrt{\langle |e_b|^2 \rangle}$ は高々 σ^2 のオーダーである。このことより、前節の近似解は、境界条件を σ^0 , σ^1 のオーダーでは満たすことがわかる。

図 4.3 は、ガウス形パワースペクトル (4.33) を用いて (4.34) を計算したもので、最も誤差が大きくなる垂直入射 ($\theta_0 = 0$) の場合を示す。図より、誤差は $k\sigma < \pi/8$ では小さいが、 $k\sigma > \pi/8$ では急激に増加することがわかる。

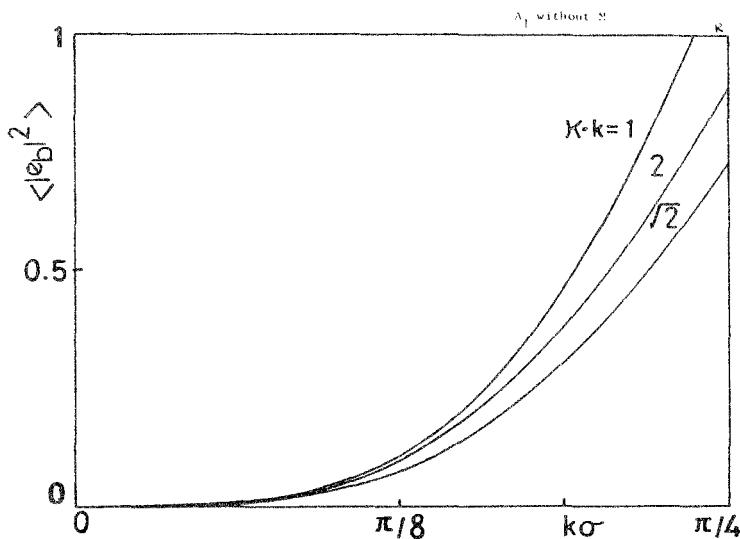


図 4.3 境界条件に関する誤差

(κ : 相関距離, σ : 表面の粗さ)

C. 光学定理

波動方程式 (4.5) の保存則

$$\operatorname{div} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{\psi^*}{k} \operatorname{grad} \psi \right) \right\} = 0 \quad (4.35)$$

を図 4.4 の円筒で体積分し，ガウスの定理により表面積分に変換すれば

$$\frac{1}{k} \operatorname{Im} \int_{\pi \ell^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} d\mathbf{r} + \frac{1}{k} \operatorname{Im} \int_{S_c} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_c = 0 \quad (436)$$

となる。ここで S_c は円筒の側面， \mathbf{n} は外向法線である（図 4.4）。 z_0 は円筒の高さ， ℓ はその半径である。左辺第一項は，底面積 $\pi \ell^2$ に比例し，第二項は円周の長さ $2\pi \ell$ に比例するから，

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \ell^2} \int_{\pi \ell^2} \operatorname{Im} \left(\frac{\psi^*}{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} d\mathbf{r} = 0 \quad (437)$$

となる。これは，（単位面積あたりの） z 方向への電力流が零であることを表し，入射電力が無損失の表面により完全に反射されることを意味する。ここで， $\psi(z, \mathbf{r}, \omega)$ が (4.16) のように一様確率場で書けることを用いると，(4.37) の被積分関数は \mathbf{r} に関して強義の一様確率場であることがわかる。そこで，(4.37) の空間平均は，エルゴード定理により Ω 上の確率平均に置換えることができる。この結果，

$$\frac{1}{k} \langle \operatorname{Im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} \rangle = 0 \quad (438)$$

が，ほとんど全ての見本表面 $f(T^f \omega)$ に対して成立する。(4.37)(4.38) は，不規則表面による波動散乱におけるエネルギー保存則の一般形を与えるものである。

(4.38) に (4.16)(4.22) を代入し，複素ウィナーエルミット微分式の直交性を用いて計算すれば，展開係数 A_n で書かれた光学定理

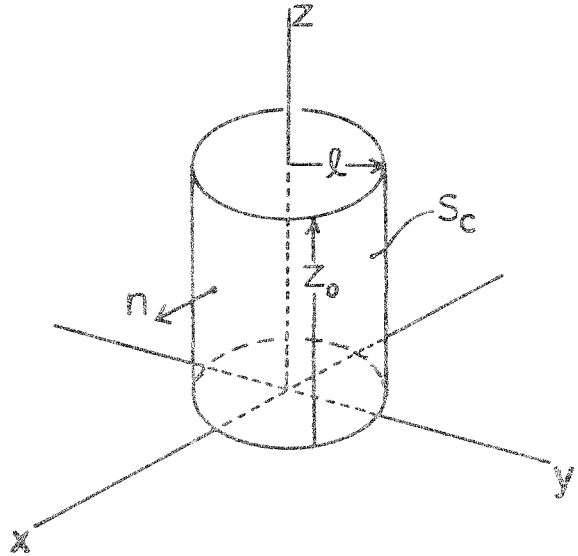


図 4.4 光学定理導出のための円筒領域

$$\frac{K_z}{k} = |1 + A_0|^2 \frac{K_z}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int \frac{k_z (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}{(K_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2} |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \quad (4.39)$$

を得る。この左辺は単位面積に入射する電力を表し、右辺第一項は単位面積あたりのコヒーレント反射電力であり、第二項（級数部）はインコヒーレント散乱電力である。（4.39）は、1次元の場合の(2.72)を二次元へ拡張したものである。

光学定理（4.39）は厳密式であるので、近似解の精度を測る一つの尺度として用いることができる。注意すべきことは、光学定理は電力の入力と出力を記述するにすぎないので、近似解が厳密に境界条件を満たすか否かにかかわらず光学定理が成立しうることである。さらに、（4.39）では伝搬する部分波が主として寄与し、表面波は A_0 を通して間接的に寄与するにすぎないことに注意されたい。一方、境界条件に関する誤差 $e_b(T^r \omega)$ には、表面波と伝搬波の両方が直接影響を与える。

図 4.5 は、（4.30）～（4.33）を用いて光学定理を計算したものである。ここで、インコヒーレント散乱電力は $A_1(\lambda)$ のみによって評価している。

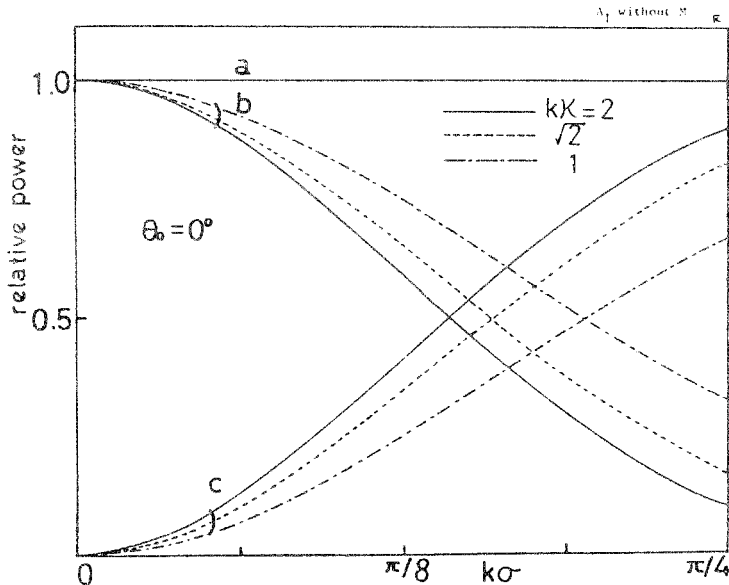


図 4.5 光 学 定 理

表面の粗さ $k\sigma$ が増加すると、コヒーレント散乱（曲線 b）は減少し、逆にインコヒーレント散乱（曲線 c）は増加する。全散乱電力（直線 a）は、入射電力に等しい一定値をもつ。これは、容易に確かめられるように、前節の近似解が光学定理を満たすためである。

D. インコヒーレント散乱の角度分布

入射角が $\Omega_0 = (\theta_0, \phi_0)$ であるとき、 $\Omega = (\theta, \phi)$ 方向の単位立体角へインコヒーレント散乱された部分波の平均電力フラックスを入射平面波のフラックスで正規化した量をインコヒーレント散乱の角度分布といい、記号 $S(\Omega | \Omega_0) = S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)$ で表す。これは、(2.74) の定義を拡張したのである。(4.39) の級数部は、単位面積あたりのインコヒーレント散乱電力であるから、関係式

$$\begin{aligned} & \int_{2\pi} \cos \Omega \cdot S(\Omega | \Omega_0) d\Omega \\ &= \int \frac{k_z(\lambda)}{k} |A_1(\lambda)|^2 d\lambda + 2! \iint \frac{k_z(\lambda_1 + \lambda_2)}{k} |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & \quad (\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 < k^2 \quad (\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 < k^2 \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

が成立する。 ϕ は x 軸から、 ϕ_0 は -x 軸から測ることにすれば、図 4.1 は $\phi_0 = 0$ を表す。そこで $\phi_0 = 0$ とおき、さらに

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \cos \theta \\ d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \\ \mathbf{K}_0 &= (k \sin \theta_0, 0) \\ \mathbf{K}_0 + \lambda &= (k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) \\ k_z(\lambda) &= k \cos \theta \\ d\lambda &= \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \cos \theta d\Omega \end{aligned} \quad (4.41)$$

等の関係を用いると

$$\begin{aligned} S(\Omega | \Omega_0) &\equiv S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \\ &= k^2 \cos \theta \left\{ |A_1(\lambda)|^2 + 2! \int_{R^2} |A_2(\lambda, \lambda - A)|^2 dA + \dots \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

但し、

$$\lambda = k[\sin \theta \cos \phi - \sin \theta_0] \mathbf{e}_x + k \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y \quad (4.43)$$

となる。ここで、 λ は、入射角 $(\theta_0, 0)$ と散乱角 (θ, ϕ) によって定まるブラックスベクトルである。(4.42) に (4.30) を代入し、 A_2 以上の項を無視すれば、

$$S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \cong k^4 |2 + A_0|^2 \cos^2 \theta_0 \cos \theta |F(k\sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi})|^2 \quad (4.44)$$

となる。ここで、パワースペクトルの等方性(4.20)を使った。

図4.6は、ガウス形パワースペクトル(4.33)を用いて $S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)$ を

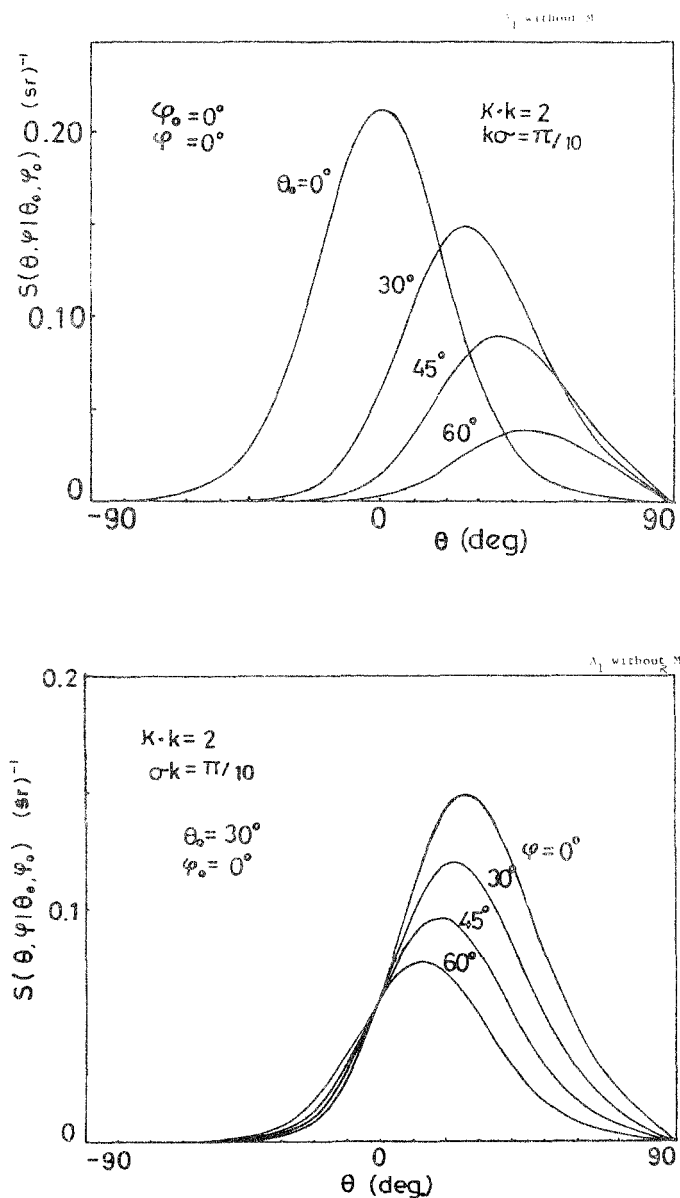


図4.6 インコヒーレント散乱の角度分布((θ_0, ϕ_0) :入射角, (θ, ϕ) :散乱角)

計算したものである。\$|F(\lambda)|^2\$ が原点 (\$\lambda=0\$) でピークをもので、前方散乱 (\$\theta=\theta_0, \phi=0\$) の方向にインコヒーレント散乱が強くなるが、実際には、(4.14) の因子 \$\cos\theta\$ も効くので、\$\theta_0\$ よりも小さい \$\theta\$ に対して \$S\$ のピークが現われている。

E. 散乱波の空間相関々数

高さ \$z\$ が一定の面内における散乱波の空間相関々数は、複素ウィナーエルミット多項式の直交性 (A141) により容易に計算できる。(4.22) を用いて計算すれば、

$$\begin{aligned} C_S(z, \mathbf{a}) &= \langle \psi_S(z, \mathbf{r}+\mathbf{a}, \omega) \psi_S^*(z, \mathbf{r}, \omega) \rangle \\ &= e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \langle U(z, \mathbf{T}^{\mathbf{r}+\mathbf{a}} \omega) U^*(z, \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) \rangle \\ &= e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \left[|1+A_0|^2 + \int_{R^2} e^{i\lambda \mathbf{a}} e^{-2\text{Im}k_z(\lambda)z} |A_1(\lambda)|^2 d\lambda + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

となる。\$z\$ が大きいとき、表面波の効果は無視できるから

$$C_S(z, \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \left[|1+A_0|^2 + \int \frac{e^{i\lambda \mathbf{a}} |A_1(\lambda)|^2 d\lambda}{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 < k^2} + \dots \right] \quad (4.46)$$

となる。これは帯域制限されているから、不規則表面のパワースペクトルの高域成分は、空間相関々数からは求めることはできない。

空間相関々数の計算において注意すべきことは、\$\psi_S(z, \mathbf{r}, \omega)\$ は垂直入射 (\$\theta_0 = 0\$) の場合を除いて、一般には一様確率場ではないことである。たとえば、\$\langle \psi_S(z, \mathbf{r}_1, \omega) \psi_S(z, \mathbf{r}_2, \omega) \rangle\$ は、\$\mathbf{r}_1\$ と \$\mathbf{r}_2\$ の両方に依存する。このため、確率平均を空間平均で置きかえるエルゴード性は成立しない。

F. 表面波の平均電力流

(4.22) において、\$k_z(\lambda)\$ が純虚数となる \$\lambda\$ 領域上の積分は、表面波を表す。これを \$\Psi_S(z, \mathbf{r}, \omega)\$ と表せば、\$A_1(\lambda)\$ のみを用いる近似では

$$\Psi_S(z, \mathbf{r}, \omega) \simeq e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} \int \frac{e^{i\lambda \mathbf{r}} e^{i k_z(\lambda) z}}{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 > k^2} A_1(\lambda) d\mathbf{B}(\lambda) \quad (4.47)$$

と書ける。\$\mathbf{K}_0\$ 方向への電力フラックス \$P_{sf}\$ は

$$P_{sf}(z, \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) = \frac{1}{k |\mathbf{K}_0|} \text{Im}(\Psi_S^* \mathbf{K}_0 \cdot \text{grad} \Psi_S) \quad (4.48)$$

となる。(4.47) を用いて、右辺の平均値を計算すれば、

$$\langle P_{sf}(z, T^f \omega) \rangle \simeq \int_{(K_0 + \lambda)^2 > k^2} \frac{(K_0 + \lambda) \cdot K_0}{k |K_0|} |A_1(\lambda)|^2 e^{-2\sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2} \cdot z} d\lambda \quad (4.49)$$

となる。右辺の指数因子は、 z とともに表面波の強度が減少することを表す。不規則表面が等方である場合には、対称性より K_0 に垂直な方向への表面波の電力フラックスは零となる。(4.49)は z に依存するので、これを K_0 に垂直な面をもつ単位幅ストリップで積分して表面波の平均電力流 P_s を定義する。 K_0 が x 方向にあるとすれば、

$$\begin{aligned} P_s &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_0^\infty dz \langle P_{sf}(z, T^f \omega) \rangle \\ &\simeq \int_{(K_0 + \lambda)^2 > k^2} \frac{K_0(K_0 + \lambda)}{2k |K_0|} \cdot \frac{|A_1(\lambda)|^2}{\sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2}} d\lambda \end{aligned} \quad (4.50)$$

となる。(4.30)～(4.33)を用いて、この右辺を数値積分した結果を図4.7に示す。不規則表面が一様等方であるので、垂直入射($\theta_0=0$)では P_s は零となり、水平入射($\theta_0=\pi/2$)では単位面積に入射する電力が零となるので、 P_s も消滅する。この結果、 $\theta_0 \simeq 40^\circ$ 付近で P_s が最大値をとる。尚、図4.7の P_s は入射フラックスで正規化した量を描いているので、その次元は面積である。

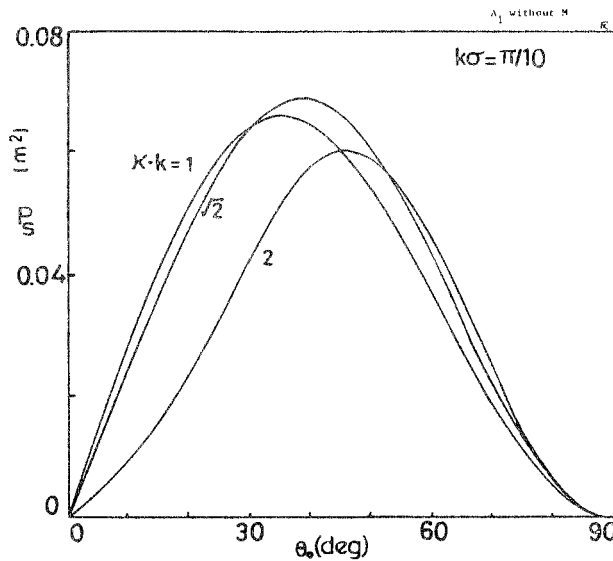


図 4.7 表面波の平均電力流〔 θ_0 ：入射角〕

4.5 解析上の問題点

4.3 B節では、 $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ を無視して $A_1(\lambda)$ の近似解(4.30)を導いた。 A_2 の効果を取り入れて $A_1(\lambda)$ を求めれば、2.4節と同様の近似において

$$A_1(\lambda) = -i \frac{(2+A_0)K_Z F(\lambda)}{1+M(\lambda)} \quad (4.51)$$

$$M(\lambda) = k_Z(\lambda) \int_{R^2} k_Z(\lambda_1 + \lambda) |F(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (4.52)$$

となる。これらは、(2.53)(2.54)に於いて λ を λ で置換えたものに等しい。(4.51)は(4.30)よりも精度の高い近似解であると考えられるが、散乱特性の数値計算において問題点が現われた。それは、 $|\lambda| \rightarrow \infty$ のとき、

$$\text{Re}[M(\lambda)] \propto -\sigma^2 |K_0 + \lambda|^2, \quad (|\lambda| \rightarrow \infty) \quad (4.53)$$

となるので、(4.51)が、

$$|K_0 + \lambda| \sim \sigma^{-1}, \quad |k_Z(\lambda)| \sim \sigma^{-1} \quad (4.54)$$

となる λ に対して鋭いピークをもつことである。このピークは、(4.51)が複素数の λ に対して極をもつことを示唆し、その極は、3.5節と同様、表面波モードを表すものと考えられる。

しかし、実効境界条件(4.7)が(4.6)の良い近似であるのは、(4.23a)が成立する場合、すなわち、伝搬する散乱部分波に限られる。逆に、

$$\sigma^2 |k_Z(\lambda)|^2 \gg k^2 \sigma^2 \quad (4.55)$$

となる表面波の部分に対しては、(4.7)は誤差が大きい。このため、表面波の極(4.54)に物理的意味を与えるには、厳密な境界条件(4.6)にもどって再検討する必要がある。

パワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ が原点($\lambda=0$)に集中している場合には、(4.54)の極は、散乱特性にほとんど影響を与えない。このことから、実効境界条件は、表面粗さが小さく、かつ、表面が滑らかで高域振動成分をもたない場合には、ランダム境界条件の良いモデルとなることが結論できる。

第五章 不規則表面による電磁波の散乱 — 水平偏波入射

5.1 ま え が き

前章までに述べた確率論を用いる方法により、電磁波の散乱を解析する。不規則表面は、完全導体で、ガウス分布をもち、表面粗さが波長に比べて十分小さいものとする。この章では水平偏波入射の場合を取扱い、次の第6章では垂直偏波入射の場合を解析する。

次節では、問題の定式化を述べる。不規則表面の粗さが波長に比べて十分小さい場合を解析するので、境界条件をティラー展開し、高次項を無視して得られる近似境界条件をランダム境界条件のモデルとする。散乱波をベクトル平面波の重ね合せにより表現するので、その準備としてベクトル平面波の垂直・水平偏波ベクトルを定義する（5.2 B 節）。次に散乱波の解の形を不規則表面の確率的一様性によって定め、波動関数が指数関数と一様ベクトル確率場の積に書けることを導く。この結果は、前章のスカラー平面波入射に対する解の形をベクトルに拡張したものとなっている。

5.3 節では、完全導体の不規則表面が、複素ガウスランダム測度により生成されるガウス一様確率場と仮定して、電磁界をウィナー展開を用いて表現する。この表現の特徴は、展開の各項が確率平均の意味で直交することの他に、展開の各項が水平偏波・垂直偏波の二つのベクトル平面波の重ね合せであることである。このため、ウィナー展開の展開係数は、水平偏波の平面波の振幅を表す係数と垂直偏波のそれを表現する係数の二つの系列をもつことになる。

5.4 節では、ウィナー展開の展開係数と散乱の統計量との関係を導く。コヒーレント反射振幅、電界の分散が発散しない条件及び電界の分散、光学定理、インコヒーレント散乱の角度分布、単位面積あたりの散乱断面積、表面波の平均電力流を定式化している。

5.5 節では、水平偏波の入射に対して、未知の展開係数を近似的に解き、電磁界の分散が有界となる新しい波動解を導いている。同時に、Rice の摂動法の欠点をも明らかにしている。

5.6 節では、展開係数の近似解を用いて、種々の散乱特性を具体的に計算し、結果を図示している。

この問題は、Rice (1951)⁽²⁵⁾ が以前に摂動による解法を試みたが、一次摂動解が発散するため具体的には解かれなかった。損失のある誘電体境界面に

対しては一次摂動解は発散しないこと、及び、完全導体の場合でも単位面積あたりの散乱断面積は例外的に発散しないことに着目して、Rice 以後の研究は、種々のパワースペクトルをもつ不規則境界面に対して散乱断面積を計算するにとどまっていた。奇妙なことであるが、この分野の専門書は、摂動解の発散の困難を指摘していない。(2)(6)54

この章の結果は、摂動法では解けなかった問題に解答を与え、同時に摂動法の欠点を明らかにしている点で散乱理論に寄与するものである。また、この章の新しい波動解は、散乱断面積のみならず任意の統計量を合理的に導けるものであるから、種々の測定法の理論的背景となりうるものでもある。

5.2 平面電磁波の散乱

A. 問題の定式化

不規則表面による平面電磁波の散乱を考える(図 5.1)。二次元 $x y$ 平面 $R^2 = (-\infty \leq x, y \leq \infty)$ 内の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y)$ で表し、三次元空間内の座標ベクトルを対 (\mathbf{r}, z) で表す。 $x y z$ 軸方向の単位ベクトルを $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ と書き、前章と同様、確率を定義する見本空間 \mathcal{Q} 内の見本点を ω で表す。

完全導体の不規則表面は、強義の実一様等方確率場 f により、

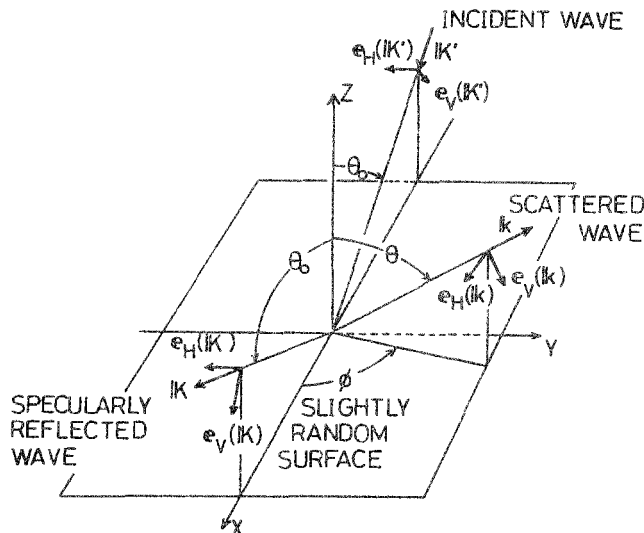


図 5.1 不規則表面による平面電磁波の散乱〔 θ_0 :入射角, (θ, ϕ) :散乱角, \mathbf{e}_H :水平偏波ベクトル, \mathbf{e}_V :垂直偏波ベクトル〕

$$z = f(T^r \omega), \quad r \in R^2 \quad (5.1)$$

と表現されとする。ここで、 T^r は見本空間 Ω 内の保測変換である。不規則表面の平均値と分散は

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \langle f(T^r \omega) \rangle = 0 \\ \langle z^2 \rangle &= \langle f^2(T^r \omega) \rangle = \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

とする。 σ は不規則表面の粗さを表すパラメーターで、波長に比べて十分小さいものとする。

マックスウェルの方程式より、電界 $E(z, r, \omega)$ は、自由空間 ($z > f$) において、

$$[\nabla^2 + k^2] E(z, r, \omega) = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{div } E(z, r, \omega) = 0 \quad (5.4)$$

を満たし、完全導体表面 (5.1) の上で境界条件

$$n \times E = 0; \quad (z = f(T^r \omega)) \quad (5.5a)$$

を満足する。ここで、 n は不規則表面上の単位法線ベクトル

$$n = \frac{-\text{grad} f(T^r \omega) + e_z}{\sqrt{1 + [\text{grad} f(T^r \omega)]^2}} \quad (5.5b)$$

である。以下では、三次元のベクトルの x, y 平面への射影を添字 0 で表し、 z 成分には添字 z を付けるものとする。電界 E を

$$E = (E_0, E_z) = E_0 + e_z E_z \quad (5.6)$$

と書けば、境界条件 (5.4) は、

$$E_0 + \text{grad} f(T^r \omega) \cdot E_z = 0, \quad (z = f(T^r \omega)) \quad (5.7)$$

となる*。不規則表面の粗さ σ と傾き $\text{grad} f(T^r \omega)$ がともに小さい場合を考えるので、(5.7) を $z=0$ で展開して得られる近似境界条件

$$E_0(0, r, \omega) + f(T^r \omega) \frac{\partial}{\partial z} E_0(z, r, \omega) \Big|_{z=0} + \text{grad} f(T^r \omega) \cdot E_z(0, r, \omega) = 0, \quad (5.8)$$

をランダム境界条件のモデルとして以下で用いる。Bass 等は、この境界条件を effective boundary condition と呼んでいる。さらに、散乱電界は遠方 ($z = \infty$) で放射条件を満たすものとする。

(5.2) (5.3) 及び (5.8) を満たす電界 $E(z, r, \omega)$ が求められると、磁界

*) 直角座標成分で書けば、(5.5a) は次の三方程式となる。 $E_y = n_y E_z$, $E_x = n_x E_z$, $n_x E_y = n_y E_x$. この第3の方程式は、第1, 第2の方程式より導かれるので、結局独立な式は二つである。これらをベクトル形で書けば (5.7) となる。

$\mathbf{H}(z, \mathbf{r}, \omega)$ は,

$$\mathbf{H}(z, \mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{\omega_0 \mu} \text{curl} \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) \quad (5.9)$$

により計算できる。ここで、 ω_0 は角周波数、 μ は自由空間の透磁率であり、時間因子 $\exp(-i\omega_0 t)$ を仮定している。

B. ベクトル平面波の偏波ベクトルの定義

この節では、ベクトル記号及び水平偏波ベクトル・垂直偏波ベクトルを定義し、後の準備とする。

平面波の波数ベクトルを \mathbf{k} と書き、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (\mathbf{k}_0, k_z) = \mathbf{k}_0 + \mathbf{e}_z k_z \\ k^2 &= k^2, \quad k_0^2 = k_0^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

とする。ここで、 k_z は \mathbf{k} の z 成分で、正の実数であるか、正の純虚数である。

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_0^2} > 0, \quad (k^2 > k_0^2) \quad (5.11a)$$

$$= i\sqrt{k_0^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_0^2) \quad (5.11b)$$

次に、波数ベクトル \mathbf{k} をもつベクトル平面波の水平偏波ベクトル $\mathbf{e}_H(\mathbf{k})$ と垂直偏波ベクトル $\mathbf{e}_V(\mathbf{k})$ を、それぞれ次式で定義する (図 5.2 参照)

$$\mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z / k_0 = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{e}_z / k_0 \quad (5.12)$$

$$\mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) / k = \frac{k_z}{k} \frac{k_0}{k_0} - \frac{k_0}{k} \mathbf{e}_z \quad (5.13)$$

この定義により、 \mathbf{k} と $\mathbf{e}_H(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_V(\mathbf{k})$ は互いに直交する三つのベクトルである。すなわち、

$$\mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = 0 \quad (5.14)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = k \mathbf{e}_V(\mathbf{k})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = -k \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = \mathbf{k} / k$$

(5.12) により、 $\mathbf{e}_H(\mathbf{k})$ は $x y$ 平面内の実ベクトルで、単位振幅

$$\mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = 1 \quad (5.16)$$

をもつ。一方、(5.11b) により k_z は複素数になりうるので、(5.13) の $\mathbf{e}_V(\mathbf{k})$ は一般に複素ベクトルである。すなわち、

$$\mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) = 1, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_V^*(\mathbf{k}) &= 1 \quad ; \quad (k_0^2 < k^2) \\ &= (2k_0^2 - k^2)/k^2, \quad (k_0^2 > k^2) \end{aligned} \quad (5.18)$$

を満たす。ここで*は複素共役を示す記号である。

以上の定義により、水平偏波のベクトル平面波 $\mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)]$ 及び、垂直偏波のベクトル平面波 $\mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)]$ は以下の関係を満たす。

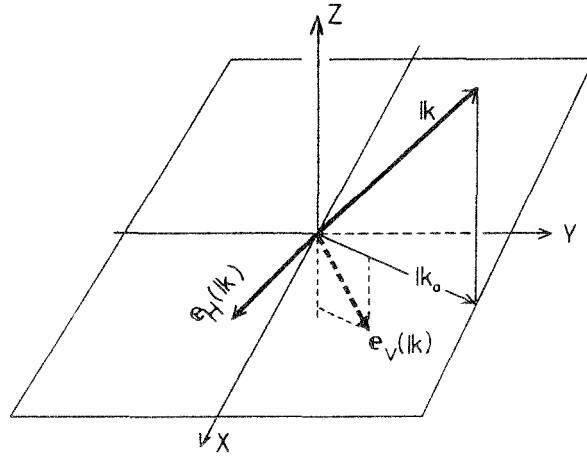


図 5.2 水平偏波・垂直偏波ベクトルの定義
〔 $\mathbf{e}_H(\mathbf{k})$ は xy 平面上のベクトル、 $\mathbf{e}_V(\mathbf{k})$ の z 成分は負である〕

$$-i \operatorname{div} \{ \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)] \} = \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \cdot e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} = 0 \quad (5.19)$$

$$-i \operatorname{div} \{ \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)] \} = \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \cdot e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} = 0 \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} -i \operatorname{curl} \{ \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)] \} &= \mathbf{k} \times \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} \\ &= k \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} -i \operatorname{curl} \{ \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)] \} &= \mathbf{k} \times \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} \\ &= -k \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + k_z z)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

上では、偏波ベクトルの一般形を定義した。この定義を入射波と鏡面反射波に適用しよう。入射波数ベクトルを \mathbf{K}' と書き

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= (\mathbf{K}_0, -K_z) = \mathbf{K}_0 - \mathbf{e}_z K_z \\ \mathbf{K}_0 &= K_0 \mathbf{e}_x, \quad K_0 = k \sin \theta_0, \\ K_z &= \sqrt{k^2 - K_0^2} = k \cos \theta_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

と置く。ここで、入射面を xz 面にとり、入射角を θ_0 とした(図 5.1 参照)。この定義により、鏡面反射波の波数ベクトル \mathbf{K} は

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0, K_z) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{e}_z K_z \quad (5.24)$$

となる。(5.23)(5.24)を(5.12)(5.13)へ代入すれば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_H(\mathbf{K}) &= \mathbf{e}_H(\mathbf{K}') = -\mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_V(\mathbf{K}') &= -\cos\theta_0 \mathbf{e}_x - \sin\theta_0 \mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_V(\mathbf{K}) &= \cos\theta_0 \mathbf{e}_x - \sin\theta_0 \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{5.25}$$

となる。 \mathbf{K} と \mathbf{K}' , $\mathbf{e}_H(\mathbf{K}')$, $\mathbf{e}_V(\mathbf{K}')$, $\mathbf{e}_H(\mathbf{K})$, $\mathbf{e}_V(\mathbf{K})$ の幾何学的関係を図 5.1 に示している。

C. 波動関数の形

不規則表面を平坦面 ($\sigma^2 = 0$) からの摂動と見なし、電界 \mathbf{E} を平坦面の場合の電界 (非摂動電界) \mathbf{E}^0 が摂動を受けたものとする。そこで、

$$\mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) + \mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega) \tag{5.26}$$

と書く。非摂動部分 \mathbf{E}^0 は、完全導体平面 ($z=0$) の上で境界条件

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}^0(0, \mathbf{r}) = 0 \tag{5.27}$$

を満たすので、水平偏波入射に対しては、

$$\mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) = e^{iK_0 x} \left[-\mathbf{e}_H(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} + \mathbf{e}_H(\mathbf{K}) e^{iK_z z} \right] \tag{5.28}$$

と書け、垂直偏波入射に対しては

$$\mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) = e^{iK_0 x} \left[\mathbf{e}_V(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} + \mathbf{e}_V(\mathbf{K}) e^{iK_z z} \right] \tag{5.29}$$

と書ける。一般の入射偏波に対しては、(5.28) と (5.29) の線形結合で $\mathbf{E}^0(z, \mathbf{r})$ が表現される。また、摂動部分 \mathbf{E}^S は、不規則表面の凹凸がなくなるとき、零に収束すべきものである。

ランダム電界 $\mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega)$ の形を決めるため、前章 (4.8) と同様、移動変換 D を次式で定義する。

$$D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(z, \mathbf{r} + \mathbf{a}, T^{-\mathbf{a}} \omega) \tag{5.30}$$

ここで、 \mathbf{a} は $x-y$ 平面内のベクトルである。移動変換 $D^{\mathbf{a}}$ は、波動方程式 (5.3) の演算子 $\nabla^2 + k^2$, (5.4) の演算子 div , 境界条件 (5.8) の演算子と可換であるから、 \mathbf{E} が境界値問題の解であれば、 $D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}$ もまた解でなければならない。そこで、 \mathbf{E} と $D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}$ は、線形関係

$$D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) = C(\mathbf{a}, \omega) \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) \tag{5.31}$$

をもっと仮定する。一方、(5.30) と (5.28) (5.29) により、 \mathbf{E}^0 は

$$D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{a}} \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}), \quad (\mathbf{K}_0 = K_0 \mathbf{e}_x) \tag{5.32}$$

と変換される。 \mathbf{E} が (5.31) を満たすためには、(5.26) の $\mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega)$ が $\mathbf{E}^0(z, \mathbf{r})$ と同じ変換性

$$D^{\mathbf{a}} \mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}} \mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega) \quad (5.33)$$

をもたなければならないから、

$$C(\mathbf{a}, \omega) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{a}}, \quad (\mathbf{K}_0 = K_0 \mathbf{e}_x) \quad (5.34)$$

となる。(5.26)及び(5.30)～(5.34)により、波動関数の形は、

$$\mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) = e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} [\mathbf{U}^0(z) + \mathbf{U}^S(z, \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega)] \quad (5.35)$$

であることが容易に導ける。ここで、

$$\mathbf{U}^S(z, \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) = \mathbf{E}^S(z, 0, \mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) \quad (5.36)$$

は保測変換 $\mathbf{T}^{\mathbf{r}}$ により生成される一様ベクトル確率場で、高さ z に依存する。

$\mathbf{U}^0(z)$ は、水平偏波入射(5.28)に対しては、

$$\mathbf{U}^0(z) = \mathbf{E}^0(z, 0) = -\mathbf{e}_H(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} + \mathbf{e}_H(\mathbf{K}) e^{iK_z z} \quad (5.37)$$

と書け、垂直偏波入射(5.29)に対しては

$$\mathbf{U}^0(z) = \mathbf{E}^0(z, 0) = \mathbf{e}_V(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} + \mathbf{e}_V(\mathbf{K}) e^{iK_z z} \quad (5.38)$$

で与えられる。

(5.35)は、電界 $\mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega)$ が指数関数と一様ベクトル確率場の積で書けることを示す。従って、散乱問題は、未知の一様ベクトル確率場を定めることに帰着する。次節では、ガウス分布をする不規則表面に対して電磁界の確率関数としての表現を述べる。

5.3 電磁界の表現

不規則表面を表す $f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega)$ は、ウィナー積分

$$f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\lambda \mathbf{r}} F(\lambda) d\mathbf{B}(\lambda) \quad (5.39)$$

により表現される一様ガウス確率場であるとする。ここで $d\mathbf{B}(\lambda)$ は、二次元複素ガウスランダム測度であり、性質(A131)～(A134)をもつ。関数 $F(\lambda)$ は、 $f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega)$ を実の等方確率場とする条件

$$F(\lambda) = F^*(-\lambda), \quad |F(\lambda)|^2 = |F(A)|^2 \quad (A = |\lambda|) \quad (5.40)$$

を満たすものとする。(A131)と(5.39)により、 $f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega)$ の相関々数 C_f は

$$\begin{aligned} C_f(|\mathbf{a}|) &= \langle f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}+\mathbf{a}} \omega) f(\mathbf{T}^{\mathbf{r}} \omega) \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\lambda \mathbf{a}} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^\infty J_0(A|\mathbf{a}|) |F(A)|^2 A dA \end{aligned} \quad (5.41)$$

となる。 $|F(\lambda)|^2$ は、不規則表面のパワースペクトルである。また (5.2) により、 $F(\lambda)$ は σ のオーダーの関数である。

未知の一様ベクトル確率場 U^S を (5.3.9) により $dB(\lambda)$ の汎関数と見なして、ウィナー展開することができる。ここでは、散乱波 $E^S(z, r, \omega) = e^{iK_0 x} U^S(z, T^r \omega)$ が、波動方程式 (5.3) と零発散の条件 (5.4) を満たすように、次式の形に書く。

$$\begin{aligned} E^S(z, r, \omega) &= e^{iK_0 r} U^S(z, T^r \omega) \quad , \quad (K_0 = K_0 e_x) \\ &= e^{iK_0 x} \left[e_H(K) A_0 + e_V(K) B_0 \right] e^{iK_z z} \\ &+ e^{iK_0 x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^2} \int_{R^2} \cdots \int_{R^2} \left\{ e_H[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n] A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \right. \\ &+ e_V[\lambda_1 + \cdots + \lambda_n] B_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \left. \right\} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) r} \\ &\times e^{ik_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) z} h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \quad (5.4.2) \end{aligned}$$

ここで、 $k_z(\lambda)$ は、ブラックベクトル λ により作られた波動ベクトル $k(\lambda)$ の z 成分であり、正の実数または正の純虚数である。すなわち

$$k(\lambda) = k_0(\lambda) + e_z k_z(\lambda) \quad ; \quad k^2(\lambda) = k^2 \quad (5.4.3)$$

$$k_0(\lambda) = K_0 + \lambda = (K_0 + \lambda_x) e_x + \lambda_y e_y \quad , \quad k_0(\lambda) = |k_0(\lambda)| \quad (5.4.4)$$

$$\begin{aligned} k_z(\lambda) &= \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} \geq 0 \quad ; \quad (k^2 \geq k_0^2(\lambda)) \\ &= i \sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2} \quad ; \quad (k^2 < k_0^2(\lambda)) \quad (5.4.5) \end{aligned}$$

(図 5.3 参照)。実の $k_z(\lambda)$ は、伝搬する部分波に対応し、純虚数の $k_z(\lambda)$ は表面波に対応する。 $e_H[\lambda]$ と $e_V[\lambda]$ は、波動ベクトル $k(\lambda)$ に直交する水平偏波ベクトルと垂直偏波ベクトルである*。(5.4.3) と (5.1.2) (5.1.3) を用いて、

$$e_H[\lambda] = e_H(k(\lambda)) = \frac{\lambda_y}{k_0(\lambda)} e_x - \frac{K_0 + \lambda_x}{k_0(\lambda)} e_y \quad (5.4.6)$$

$$e_V[\lambda] = e_V(k(\lambda)) = \frac{k_z(\lambda)}{k} \frac{(K_0 + \lambda_x) e_x + \lambda_y e_y}{k_0(\lambda)} - \frac{k_0(\lambda)}{k} e_z \quad (5.4.7)$$

と定義する。(5.4.3) ~ (5.4.7) により $e_H[\lambda]$ と $e_V[\lambda]$ 及び $k(\lambda)$ は (5.1.4) (5.1.5) の直交関係を満足し、かつ (5.1.9) ~ (5.2.2) と類似の関係

$$\text{div} \left\{ e_H[\lambda] e^{iK_0(\lambda)r + ik_z(\lambda)z} \right\} = 0 \quad (5.4.8)$$

*) (5.1.2) (5.1.3) の $e_H(k)$, $e_V(k)$ と区別するため角括弧を用い $e_H[\lambda]$, $e_V[\lambda]$ と書いている。

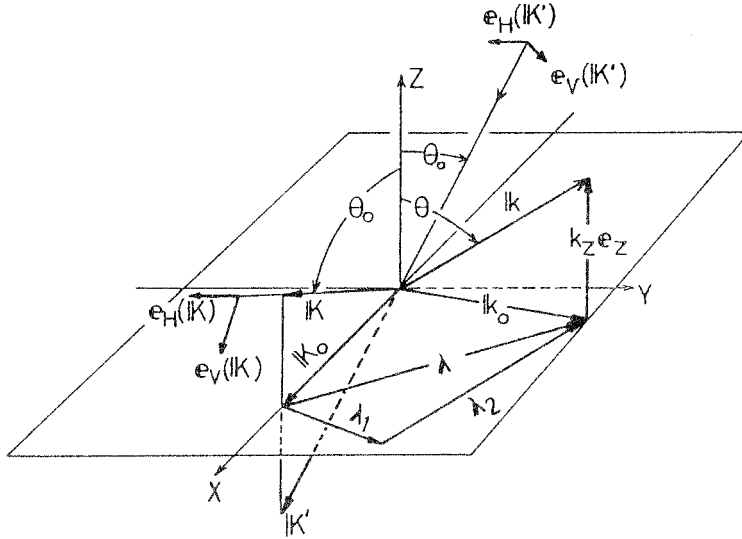


図 5.3 K' と K, K_0, λ の関係 (K_0 と k_0 とがなす角が ϕ である。)

$$\operatorname{div}\{e_V[\lambda]e^{ik_0(\lambda)r+ik_z(\lambda)z}\}=0 \quad (5.49)$$

$$\operatorname{curl}\{e_H[\lambda]e^{ik_0(\lambda)r+ik_z(\lambda)z}\}=ike_V[\lambda]e^{ik_0(\lambda)r+ik_z(\lambda)z} \quad (5.50)$$

$$\operatorname{curl}\{e_V[\lambda]e^{ik_0(\lambda)r+ik_z(\lambda)z}\}=-ike_H[\lambda]e^{ik_0(\lambda)r+ik_z(\lambda)z} \quad (5.51)$$

を満たす。図 5.3 は、入射波数ベクトル K' とブラッグベクトル λ 、及び $k(\lambda)$ の関係を示している。

A_n と B_n は、それぞれ水平偏波の部分波の振幅と垂直偏波の部分波の振幅を表すもので、いずれもその変数に関して対称な関数である。これらの未知関数は境界条件を解き 5.5 節で求める。複素ウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}$ は、展開 (5.42) の直交完備な基底である。

(5.42) は、電界の確率場としての表現を与えるもので、スカラー波の表現 (4.22) をベクトルに拡張したものである。スカラー波の場合との違いは、(5.42) では偏波成分の振幅を表現する二つの展開係数 A_n と B_n をもつこと、及び、(5.48) (5.49) によりベクトル部分波が (5.4) を満たすことである。上の電界の表現を用いて次に磁界の表現を求めよう。(5.26) と同じように磁界 $H(z, r, \omega)$ を非摂動部分 H^0 と摂動部分 H^S とに分解する。

$$H(z, r, \omega) = H^0(z, r) + H^S(z, r, \omega), \quad (5.52)$$

$$\mathbf{H}^0(z, \mathbf{r}) = -\frac{i}{\omega_0 \mu} \text{curl } \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) \quad (5.53)$$

$$\mathbf{H}^S(z, \mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{\omega_0 \mu} \text{curl } \mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega) \quad (5.54)$$

水平偏波入射 (5.28) に対しては, (5.53) (5.21) を用いて,

$$\mathbf{H}^0(z, \mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} e^{iK_0 x} \{ \mathbf{e}_V(\mathbf{K}) e^{iK_z z} - \mathbf{e}_V(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} \} \quad (5.55)$$

となる。ここで η は自由空間の固有インピーダンスである。(5.42) を (5.54) に代入して, (5.21) (5.22) (5.50) (5.51) を用いれば, $\mathbf{H}^S(z, \mathbf{r}, \omega)$ の表現

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^S(z, \mathbf{r}, \omega) = & \frac{1}{\eta} e^{iK_0 x} \{ \mathbf{e}_V(\mathbf{K}) A_0 - \mathbf{e}_H(\mathbf{K}) B_0 \} e^{iK_z z} \\ & + \frac{1}{\eta} e^{iK_0 x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^2} \cdots \int_{R^2} \{ \mathbf{e}_V[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n] A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \\ & - \mathbf{e}_H[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n] B_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) r} \\ & \times e^{i k_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) z} h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \cdots, dB(\lambda_n)]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

が得られる。

以上で, 電磁界の確率場としての表現が得られた。次節では, この表現に基づき, 種々の散乱特性を定式化する。

5.4 散乱特性の定式化

A. コヒーレント波

(5.42) を平均し, (A140) の直交性を用いれば, コヒーレント波は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) \rangle &= \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) + \langle \mathbf{E}^S(z, \mathbf{r}, \omega) \rangle \\ &= \mathbf{E}^0(z, \mathbf{r}) + e^{iK_0 x} \{ A_0 \mathbf{e}_H(\mathbf{K}) + B_0 \mathbf{e}_V(\mathbf{K}) \} e^{iK_z z} \end{aligned}$$

と書ける。水平偏波の場合, (5.28) により

$$\langle \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) \rangle = e^{iK_0 x} \{ -\mathbf{e}_H(\mathbf{K}') e^{-iK_z z} + [(1+A_0) \mathbf{e}_H(\mathbf{K}) + B_0 \mathbf{e}_V(\mathbf{K})] e^{iK_z z} \} \quad (5.57)$$

となる。後に示すように, 一様等方確率場である不規則表面に対してはコヒーレント散乱に交差偏波を生じない。すなわち, $B_0 = 0$ となる。

B. 電界の分散

Rice の一次摂動解では, \mathbf{E}_x と \mathbf{E}_y の分散は有限であったが, \mathbf{E}_z の分散は

発散した。そこで、 E_z の分散を (5.42) を用いて定式化し、分散が有界であるための必要条件を導こう。

(5.26) (5.42) により

$$E(z, r, \omega) - \langle E(z, r, \omega) \rangle = E^S(z, r, \omega) - \langle E^S(z, r, \omega) \rangle$$

となる。この右辺は、(5.42) の級数部分に等しいことに注意する。そこで、(5.42) 級数部分の z 成分をとることにより

$$\begin{aligned} E_z - \langle E_z \rangle = & e^{iK_0 x} \left\{ \int_{R^2} e_{VZ}[\lambda] B_1(\lambda) e^{i\lambda r} e^{ik_z(\lambda)z} h^{(1)}[dB(\lambda)] \right. \\ & + \int_{R^2} \int_{R^2} e_{VZ}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda') e^{i(\lambda + \lambda')r} e^{ik_z(\lambda + \lambda')z} h^{(2)}[dB(\lambda), dB(\lambda')] \\ & \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $e_{VZ}[\lambda]$ は $e_V[\lambda]$ の z 成分で、(5.47) より

$$e_{VZ}[\lambda] = -k_0(\lambda)/k = -\sqrt{(k + \lambda_x)^2 + \lambda_y^2}/k \quad (5.58)$$

で与えられる。複素ウィナーエルミット微分式の直交性 (A141) を用いれば、 E_z の分散は容易に計算でき、

$$\begin{aligned} \langle |E_z - \langle E_z \rangle|^2 \rangle = & \frac{1}{k^2} \int_{R^2} k_0^2(\lambda) |B_1(\lambda)|^2 e^{-2\text{Im}[k_z(\lambda)]z} d\lambda \\ & + \frac{2}{k^2} \int_{R^2} \int_{R^2} k_0^2(\lambda + \lambda') |B_2(\lambda, \lambda')|^2 e^{-2\text{Im}[k_z(\lambda + \lambda')]z} d\lambda d\lambda' + \dots \end{aligned} \quad (5.59)$$

となる。右辺被積分関数における指数因子は表面波の効果を与える。(5.45) の定義により、 z が小であるほど E_z の分散が増加することになるから、左辺が有限であるためには、右辺の各積分が $z = 0$ で有限であることが必要である。つまり、 B_n に対する必要条件として

$$\int_{R^2} k_0^2(\lambda) |B_1(\lambda)|^2 d\lambda < \infty, \quad (5.60)$$

$$\int_{R^2} \int_{R^2} k_0^2(\lambda + \lambda') |B_2(\lambda, \lambda')|^2 d\lambda d\lambda' < \infty \quad (5.61)$$

等が得られる。これらは、スカラー波の場合の条件 (3.18) に対応するものである。

z が大きいとき、表面波の影響が無視できる。すなわち、(5.59) の各積分領域を $k_z(\lambda)$, $k_z(\lambda + \lambda')$ 等が実である λ 領域に制限することができる。従って、

$$\begin{aligned} \langle |E_z - \langle E_z \rangle|^2 \rangle &= \frac{1}{k^2} \int \frac{k_0^2(\lambda)}{(K_0 + \lambda)^2} \langle k^2 \rangle |B_1(\lambda)|^2 d\lambda \\ &+ \frac{2!}{k^2} \iint \frac{k_0^2(\lambda + \lambda')}{(K_0 + \lambda + \lambda')^2} \langle k^2 \rangle |B_2(\lambda, \lambda')|^2 d\lambda d\lambda' + \dots, (z \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5.62)$$

と書ける。E_x と E_y の分散も全く同様に定式化できるが、ここでは省略する。

C. 光学定理

電磁界が (5.35) のように一様確率場と指数関数の積で書けるから、複素ポインテングベクトル

$$\mathbf{P}(z, \mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(z, \mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(z, \mathbf{r}, \omega) \} \quad (5.63)$$

は、 \mathbf{r} に関して一様ベクトル確率場である。周知のように、 \mathbf{P} は関係式

$$\text{div}[\text{Re} \mathbf{P}] = 0$$

を満たす。これを半径 ℓ ，高さ z_0 をもつ円柱領域で体積分し、ガウスの定理により表面積分に変換すれば、条件 (5.5 a) の下で、

$$\text{Re} \int_{\pi \ell^2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P}(z_0, \mathbf{r}, \omega) dxdy + \text{Re} \int_{S_c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(z, \mathbf{r}, \omega) dS_c = 0 \quad (5.64)$$

となる。ここで、 $\pi \ell^2$ は円柱上部の表面積、 S_c は円柱の側面、 \mathbf{n} は S_c 上の単位法線である。この積分の第一項は面積 $\pi \ell^2$ に比例し、一方、第二項は円柱の半径 ℓ に比例するにすぎない。従って、

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi \ell^2} \text{Re} \int_{\pi \ell^2} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dxdy = 0 \quad (5.65)$$

となる。この被積分関数は一様確率場であるので、エルゴード定理により、(5.65) は、

$$\frac{1}{2} \text{Re} \langle \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \rangle = 0 \quad (5.66)$$

に等しい。この関係式は、 z 方向への電力の流れがないことを表し、入射電力が完全導体表面により完全に反射されることを意味している。

(5.66) に電磁界の表現 (5.26) (5.28) (5.42) (5.52) (5.55) (5.56) を代入し、複素ウィナーエルミット微分式の直交性 (A141) と偏波ベクトルの直交性 (5.15) を用いれば、展開係数 A_n, B_n で書いた光学定理が得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{K_z}{k} = & \left\{ |1+A_0|^2 + |B_0|^2 \right\} \frac{K_z}{k} \\ & + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int_{(K_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2 < k^2} k_z(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) \left\{ |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 \right. \\ & \left. + |B_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 \right\} d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \end{aligned} \quad (5.67)$$

この左辺は（入射電力密度 $(2\eta)^{-1}$ で正規化した）単位面積あたりの入射電力，右辺の第一項はコヒーレント散乱電力，右辺級数部はインコヒーレント散乱電力をそれぞれ表現している。(5.67)は，入射電力と全散乱電力とが等しいことを意味する。これは，スカラー波の場合の(2.75)(4.39)を拡張したものとになっている。コヒーレント散乱とインコヒーレント散乱が二つの偏波成分の振幅 A_n, B_n で書かれている点がスカラーの場合とは異なっている。

(5.67) 右辺は非負の数の和であるから，二つの不等式

$$|1+A_0|^2 \leq 1 \quad (5.68)$$

$$\operatorname{Re}(A_0) \leq 0 \quad (5.69)$$

が成立する。(5.68)は，水平偏波のコヒーレント反射振幅が入射波の振幅より小であることを示す〔(5.57)参照〕。これらの不等式は，コヒーレント散乱振幅の減少により，インコヒーレント散乱が生成されることを意味している。

D. インコヒーレント散乱の角度分布

前章 4.4 D 節と同様，インコヒーレント散乱の角度分布を $S(\Omega|\Omega_0) \equiv S(\theta, \phi|\theta_0, \phi_0)$ と書く。これは，入射角が $\Omega_0 = (\theta_0, \phi_0)$ であるとき， $\Omega = (\theta, \phi)$ 方向の単位立体角へインコヒーレント散乱された部分波の平均電力フラックスを入射平面波の電力フラックスで割ったものである。従って $S(\Omega|\Omega_0)$ の次元は立体角の逆数 $(\text{sr})^{-1}$ である。光学定理(5.67)の級数部は，単位面積から散乱されるインコヒーレント電力の平均値であるから，関係式

$$\begin{aligned} \int_{2\pi} \cos\theta S(\Omega|\Omega_0) d\Omega = & \frac{1}{k} \int_{(K_0+\lambda)^2 < k^2} k_z(\lambda) \left\{ |A_1(\lambda)|^2 + |B_1(\lambda)|^2 \right\} d\lambda \\ & + \frac{2!}{k} \iint_{(K_0+\lambda_1+\lambda_2)^2 < k^2} k_z(\lambda_1+\lambda_2) \left\{ |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 + |B_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 \right\} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (5.70)$$

が成立する。図 5.3 の散乱角 (θ, ϕ) と $k_0(\lambda)$, $k_0(\lambda_1+\lambda_2)$ 等の関係

$$\begin{aligned}
(\text{第一項}) \quad & \mathbf{k}_0(\lambda) = \mathbf{K}_0 + \lambda = (k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) \\
& k_z(\lambda) = k \cos \theta, \quad d\lambda = \cos \theta \, d\Omega \\
(\text{第二項}) \quad & \mathbf{k}_0(\lambda_1 + \lambda_2) = \mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = (k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) \\
& k_z(\lambda_1 + \lambda_2) = k \cos \theta, \quad d\lambda_1 = \cos \theta \, d\Omega
\end{aligned} \tag{5.71}$$

等を用いると

$$S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = S_{\text{HV}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) + S_{\text{HH}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \tag{5.72}$$

$$S_{\text{HH}}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = k^2 \cos \theta \left\{ |A_1(\lambda)|^2 + 2! \int_{\mathbb{R}^2} |A_2(\lambda - \lambda_2, \lambda_2)|^2 d\lambda_2 + \dots \right\}, \tag{5.73}$$

$$S_{\text{HV}}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = k^2 \cos \theta \left\{ |B_1(\lambda)|^2 + 2! \int_{\mathbb{R}^2} |B_2(\lambda - \lambda_2, \lambda_2)|^2 d\lambda_2 + \dots \right\} \tag{5.74}$$

となる。但し、

$$\lambda = \mathbf{k}_0 - \mathbf{K}_0 = k(\sin \theta \cos \phi - \sin \theta_0) \mathbf{e}_x + k \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y$$

は、図 5.3 が示すように入射角 $(\theta_0, 0)$ と散乱角 (θ, ϕ) により定まるブラッグベクトルである。S の添字 HH は水平偏波入射—水平偏波散乱を示し、添字 HV は水平偏波入射—垂直偏波散乱を示す。

E. 単位面積あたりの散乱断面積

図 2.6 及び 2.5 C 節で定義したように、 $S(\Omega | \Omega_0)$ は $(\cos \theta)^{-1}$ に比例する表面面積部分からの散乱電力に関する量であるので、これを単位面積あたりに換算するとともに無次元とした量

$$\sigma^0(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = 4\pi \cos \theta S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \tag{5.75}$$

を単位面積あたりの散乱断面積という。(5.72) の散乱偏波にもとづく分割に対応して

$$\begin{aligned}
\sigma^0(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) &= \sigma_{\text{HH}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) + \sigma_{\text{HV}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \\
\sigma_{\text{HH}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) &= 4\pi \cos \theta S_{\text{HH}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) \\
\sigma_{\text{HV}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) &= 4\pi \cos \theta S_{\text{HV}}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)
\end{aligned} \tag{5.76}$$

を定義し、後に計算する。 $S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)$ は全ての散乱角 (θ, ϕ) に対して有限値をとるから、(5.75) より

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \sigma^0(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = 0 \tag{5.77}$$

が成立しなければならない。次節で求める我々の解は、この性質を満足するが、1 次摂動解は (5.77) を満たさない。

F. 表面波の平均電力流

(5.42) (5.56) において、不等式

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2 > k^2$$

を満たす λ 領域上の積分は、表面波を与える。表面波の電界を \mathbf{E}_{sf} と書き、磁界を \mathbf{H}_{sf} と書けば、(5.42)(5.56)により

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sf}}(z, \mathbf{r}, \omega) = & e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{x}} \cdot \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 > k^2} \{A_1(\lambda) \mathbf{e}_H[\lambda] + B_1(\lambda) \mathbf{e}_V[\lambda]\} e^{i\lambda \mathbf{r} + i k_z(\lambda) z} d\mathbf{B}(\lambda) \\ & + e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{x}} \int \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 > k^2} \{A_2(\lambda_1, \lambda_2) \mathbf{e}_H[\lambda_1 + \lambda_2] + B_2(\lambda_1, \lambda_2) \mathbf{e}_V[\lambda_1 + \lambda_2]\} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{r}} \\ & \times e^{i k_z(\lambda_1 + \lambda_2) z} \cdot h^{(2)}[d\mathbf{B}(\lambda_1), d\mathbf{B}(\lambda_2)] + \dots, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{sf}}(z, \mathbf{r}, \omega) = & \frac{1}{\eta} e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{x}} \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 > k^2} \{\mathbf{e}_V[\lambda] A_1(\lambda) - \mathbf{e}_H[\lambda] B_1(\lambda)\} e^{i\lambda \mathbf{r} + i k_z(\lambda) z} d\mathbf{B}(\lambda) \\ & + \frac{1}{\eta} e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{x}} \int \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 > k^2} \{\mathbf{e}_V[\lambda_1 + \lambda_2] A_2(\lambda_1, \lambda_2) - \mathbf{e}_H[\lambda_1 + \lambda_2] B_2(\lambda_1, \lambda_2)\} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{r}} \\ & \times e^{i k_z(\lambda_1 + \lambda_2) z} h^{(2)}[d\mathbf{B}(\lambda_1), d\mathbf{B}(\lambda_2)] + \dots \end{aligned} \quad (5.79)$$

となる。表面波による複素ポインティングベクトル \mathbf{P}_{sf} の実部

$$\text{Re } \mathbf{P}_{\text{sf}} = \text{Re} [\mathbf{E}_{\text{sf}} \times \mathbf{H}_{\text{sf}}^*] / 2$$

が表面波の電力流密度を与える。この平均値を(5.78)(5.79)(A141)により計算すれば

$$\begin{aligned} \langle \text{Re } \mathbf{P}_{\text{sf}} \rangle = & \frac{1}{k} \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 > k^2} (\mathbf{K}_0 + \lambda) \{ |A_1(\lambda)|^2 + |B_1(\lambda)|^2 \} e^{-2 \text{Im}[k_z(\lambda)] z} d\lambda \\ & + \frac{2!}{k} \int \int_{(\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 > k^2} (\mathbf{K}_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \{ |A_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 + |B_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 \} e^{-2 \text{Im}[k_z(\lambda_1 + \lambda_2)] z} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5.81)$$

となる。但し、この右辺は入射電力密度 $(2\eta)^{-1}$ で正規化した量である。図5.1のように $-x$ 方向から平面波が入射するとき、 y 方向に単位幅をもち z 方向に半無限長のストリップを通過する表面波の平均電力流 P_s は、

$$\begin{aligned} P_s = & \int_0^\infty dz \int_{-1/2}^{1/2} dy \quad \mathbf{e}_x \cdot \langle \text{Re } \mathbf{P}_{\text{sf}} \rangle \\ = & \frac{1}{2k} \int \frac{\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{K}_0 + \lambda)^2 - k^2}} \{ |A_1(\lambda)|^2 + |B_1(\lambda)|^2 \} d\lambda + \dots \end{aligned} \quad (5.82)$$

となる。これは定義により面積の次元をもつ。

5.5 展開係数の計算—水平偏波入射

展開係数 A_n, B_n が得られると、電磁界が (5.42) (5.56) より定まり、散乱の統計量が前節の式により計算できる。そこで、この節では展開係数を求めることにしよう。

(5.35) のように、電磁界は一様ベクトル確率場と指数関数の積であるから、共通の指数因子を除外すれば境界条件 (5.8) は一様確率場に関する方程式と考えることができる。このため、以下では $\mathbf{r} = 0$ と置き、(5.8) を確率方程式と見なして解く。具体的に計算を進めるため、まず $z = r = 0$ における $f(T^{\mathbf{r}}\omega)$, $\text{grad}f(T^{\mathbf{r}}\omega)$, \mathbf{E}_0 , $\partial\mathbf{E}_0/\partial z$, E_z の表現を書こう。(5.39) より、

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} F(\lambda) dB(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} F^*(\lambda) dB^*(\lambda), \quad (5.83)$$

$$\text{grad}f(\omega) = i \int_{\mathbb{R}^2} \lambda F(\lambda) dB(\lambda) = -i \int_{\mathbb{R}^2} \lambda F^*(\lambda) dB^*(\lambda),$$

但し、左辺は $\text{grad}f(T^{\mathbf{r}}\omega)$ の $\mathbf{r} = 0$ での値を示す。(5.26) (5.28) (5.42) により、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(0, 0, \omega) &= \{-\mathbf{e}_y A_0 + \mathbf{e}_x B_0 K_z / k\} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \{\mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{V0}[\lambda] B_1(\lambda)\} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \{\mathbf{e}_H[\lambda_1 + \lambda_2] A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \mathbf{e}_{V0}[\lambda_1 + \lambda_2] B_2(\lambda_1, \lambda_2)\} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_0(0, 0, \omega) &= -i(2 + A_0) K_z \mathbf{e}_y + i \frac{K_z^2}{k} B_0 \mathbf{e}_x \\ &+ i \int_{\mathbb{R}^2} k_z(\lambda) \{\mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{V0}[\lambda] B_1(\lambda)\} h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ &+ i \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} k_z(\lambda + \lambda') \{\mathbf{e}_H[\lambda_1 + \lambda_2] A_2(\lambda_1, \lambda_2) + \mathbf{e}_{V0}[\lambda_1 + \lambda_2] B_2(\lambda_1, \lambda_2)\} \\ &\times h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} E_z(0, 0, \omega) &= -\frac{K_0}{k} B_0 + \int_{\mathbb{R}^2} e_{Vz}[\lambda] B_1(\lambda) h^{(1)}[dB(\lambda)] \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e_{Vz}[\lambda_1 + \lambda_2] B_2(\lambda_1, \lambda_2) h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots \end{aligned} \quad (5.86)$$

ここで、 $\mathbf{e}_{V0}[\lambda]$ は $\mathbf{e}_V[\lambda]$ の xy 面への射影であり、(5.47) より、

$$\mathbf{e}_v[\lambda] = \mathbf{e}_{v0}[\lambda] + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_{vz}[\lambda],$$

$$\mathbf{e}_{v0}[\lambda] = \frac{k_z(\lambda)}{k \cdot k_0(\lambda)} (K_0 + \lambda), \quad \mathbf{e}_{vz}[\lambda] = -\frac{k_0(\lambda)}{k} \quad (5.87)$$

となる。これらの表現式を境界条件 (5.8) に代入し、漸化式 (A139) と直交性 (A141) を用いれば、 A_n, B_n に関する一連のベクトル方程式が得られる。低次の方程式を書けば、

$$-\mathbf{e}_y A_0 + \mathbf{e}_x \frac{K_z B_0}{k} + i \int_{R^2} k_z(\lambda) \{ \mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda) \} F^*(\lambda) d\lambda$$

$$- i \int_{R^2} \lambda F^*(\lambda) \mathbf{e}_{vz}[\lambda] B_1(\lambda) d\lambda = 0, \quad (5.88)$$

$$\mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda) + i \left\{ -(2 + A_0) K_z \mathbf{e}_y + \frac{K_z^2}{k} B_0 \mathbf{e}_x \right\} F(\lambda)$$

$$+ 2i \int_{R^2} k_z(\lambda + \lambda') F^*(\lambda) \{ \mathbf{e}_H[\lambda + \lambda'] A_2(\lambda, \lambda') + \mathbf{e}_{v0}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda') \} d\lambda'$$

$$- i \frac{K_0}{k} \lambda F(\lambda) B_0 - 2i \int_{R^2} \lambda' F^*(\lambda') \mathbf{e}_{vz}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda') d\lambda' = 0, \quad (5.89)$$

$$\mathbf{e}_H[\lambda + \lambda'] A_2(\lambda, \lambda') + \mathbf{e}_{v0}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda')$$

$$+ \frac{i}{2} F(\lambda) k_z(\lambda') \{ \mathbf{e}_H[\lambda'] A_1(\lambda') + \mathbf{e}_{v0}[\lambda'] B_1(\lambda') \}$$

$$+ \frac{i}{2} F(\lambda') k_z(\lambda) \{ \mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda) \}$$

$$+ \frac{i}{2} \lambda F(\lambda) \mathbf{e}_{vz}[\lambda] B_1(\lambda') + \frac{i}{2} \lambda' F(\lambda') \mathbf{e}_{vz}[\lambda] B_1(\lambda) + \dots = 0, \quad (5.90)$$

等である。(5.2)(5.39)より $F(\lambda)$ は σ のオーダーの微小量であることを用いれば、(5.89)より $A_1(\lambda)$ と $\mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda)$ は高々 σ のオーダーであることがわかる。同様に(5.88)(5.89)から、 A_0 と $K_z B_0, A_2(\lambda, \lambda'), \mathbf{e}_{v0}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda')$ は高々 σ^2 のオーダーの微小量である。ここで注意すべきことは、 $K_z B_0$ は微小量であるが、 $K_z \simeq 0$ となる場合には B_0 は微小量とは限らないことである。同様に、 $|\mathbf{e}_{vz}[\lambda]| \simeq 0$ となる λ に関しては $B_1(\lambda)$ はかならずしも微小量ではない。

十分小さい σ に対して、展開係数 $A_0, B_0, A_1(\lambda), B_1(\lambda)$ を求めよう。まず、

$$A_n = B_n = 0 \quad (n \geq 2) \quad (5.91)$$

と置けば、(5.89)は、

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_H[\lambda] A_1(\lambda) + \mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda) \\ &= i \{ (2+A_0) K_z \mathbf{e}_y - K_z^2 B_0 \mathbf{e}_x / k \} F(\lambda) + K_0 \lambda F(\lambda) B_0 / k, \end{aligned} \quad (5.92)$$

と簡単になる。 $\mathbf{e}_H[\lambda]$ と $\mathbf{e}_{v0}[\lambda]$ は直交するから、この $\mathbf{e}_H[\lambda]$ 成分より $A_1(\lambda)$ の近似解

$$A_1(\lambda) = -i \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)} \{ (2+A_0) K_z (K_0 + \lambda_x) + k \lambda_y B_0 \} \quad (5.93)$$

を得る。この右辺は、 $|k_0(\lambda)| = |K_0 + \lambda| = \sqrt{(K_0 + \lambda_x)^2 + \lambda_y^2} = 0$ となる λ に対しては有界で発散しない。次に (5.92) と $\mathbf{e}_{v0}[\lambda]$ との内積をとり、

$$\mathbf{e}_{v0}^2[\lambda] = k_z^2(\lambda) / k^2 \quad \text{で両辺を割れば、}$$

$$B_1(\lambda) = \frac{i F(\lambda)}{k_0(\lambda) k_z(\lambda)} \{ (2+A_0) K_z \lambda_y k + B_0 [K_0 k_0^2(\lambda) - k^2 (K_0 + \lambda_x)] \}, \quad (5.94)$$

となる。これは、 $|k_0(\lambda)| = 0$ となる λ に対しては有限であるが、Rayleigh 波数

$$k_z(\lambda) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} = 0, \quad |K_0 + \lambda| = k \quad (5.95)$$

を与える λ に対しては発散することになる。物理的には電界の分散が発散することはないので、(5.94) は $B_1(\lambda)$ の近似解とはなりえない。

良い近似解 $B_1(\lambda)$ を得るためには、先に無視した A_2, B_2 からの補正を取り入れる必要がある。この補正項は、 $A_3 = B_3 = 0$ と置いて (5.90) を A_2, B_2 について解き、(5.89) にこれらを代入すれば得られる。この計算は煩雑であり、(5.94) は Rayleigh 波数以外では近似解となりうるので、補正量の計算は、(5.95) を満たす λ に対してのみ行うことにする。この場合、(5.87) (5.95) により、

$$\begin{aligned} k_z(\lambda) &\simeq 0, & k_0(\lambda) &= |K_0 + \lambda| \simeq k \\ \mathbf{e}_{v0}[\lambda] &\simeq 0, & \mathbf{e}_{vz}[\lambda] &\simeq -1 \end{aligned} \quad (5.96)$$

と置くことができる。この条件の下では、(5.90) の第四項は無視でき、また、第三項と第五項は (5.89) に代入した際に $F(\lambda)$ に対する補正を与えるにすぎないので無視することにする。このとき、(5.90) は近似的に

$$\mathbf{e}_H[\lambda + \lambda'] A_2(\lambda, \lambda') + \mathbf{e}_{v0}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda') \simeq \frac{i}{2} \lambda' F(\lambda') B_1(\lambda) \quad (5.97)$$

と書ける。この $\mathbf{e}_{v0}[\lambda + \lambda']$ 成分を計算すれば、

$$B_2(\lambda, \lambda') \simeq \frac{i}{2} \frac{k}{k_z(\lambda + \lambda')} \frac{[(K_0 + \lambda) \cdot \lambda']}{k_0(\lambda + \lambda')} F(\lambda') B_1(\lambda) \quad (5.98)$$

となる。(5.97)を(5.89)の第四項に, (5.98)を(5.89)の第六項に代入して A_2 と B_2 を消去すれば,

$$\begin{aligned} & e_H[\lambda] A_1(\lambda) + e_{v0}[\lambda] B_1(\lambda) \\ & - B_1(\lambda) \left\{ \int_{R^2} \lambda' \left[k_z(\lambda + \lambda') + \frac{[(K_0 + \lambda + \lambda') \cdot \lambda']}{k_z(\lambda + \lambda')} \right] |F(\lambda')|^2 d\lambda' \right\} \\ & = i(2 + A_0) K_z F(\lambda) e_y + i \frac{B_0}{k} [K_0 \lambda - K_z^2 e_z] F(\lambda) \end{aligned} \quad (5.99)$$

を得る。これを(5.92)と比較すれば, この左辺第3項に補正項が現われていることがわかる。(5.99)の $e_{v0}[\lambda]$ 成分を計算すれば, $B_1(\lambda)$ の近似解

$$B_1(\lambda) = \frac{i F(\lambda)}{k_0(\lambda) [k_z(\lambda) - k r']} \left\{ (2 + A_0) k K_z \lambda_y + B_0 [K_0 k_0^2(\lambda) - k^2 (K_0 + \lambda_x)] \right\}, \quad (5.100)$$

$$r' = - \frac{1}{k} \int_{R^2} \frac{(K_0 + \lambda) \lambda' [k^2 - (K_0 + \lambda + \lambda') (K_0 + \lambda)]}{k_z(\lambda + \lambda')} |F(\lambda')|^2 d\lambda' \quad (5.101)$$

が得られる。次に, (5.96)を用いて(5.101)右辺を計算する。二つのベクトル $A = K_0 + \lambda + \lambda'$ と $K_0 + \lambda$ とのなす角を ϕ' とすれば

$$(K_0 + \lambda + \lambda') (K_0 + \lambda) = (K_0 + \lambda)^2 + \lambda' (K_0 + \lambda) \cong A k \cos \phi',$$

$$(K_0 + \lambda) \lambda' \cong A k \cos \phi' - (K_0 + \lambda)^2 = A k \cos \phi' - k^2, \quad A = |K_0 + \lambda + \lambda'|$$

であるから,

$$r' = -k \int_0^k \frac{\Gamma(A)}{\sqrt{k^2 - A^2}} A dA + i k \int_k^\infty \frac{\Gamma(A)}{\sqrt{A^2 - k^2}} A dA \quad (5.102)$$

$$\Gamma(A) = \int_0^{2\pi} (A \cos \phi' - k)^2 |F(\sqrt{A^2 + k^2 - 2kA \cos \phi'})|^2 d\phi' \quad (5.103)$$

となる。ここで, パワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ の等方性(5.40)を用いた。

$B_1(\lambda)$ の近似解(5.100)では, Rayleigh波数(5.95)を与える λ に関し
てのみ補正量 r' を求めた。このため(5.100)は, 一般の λ に対しては近似が劣
化すると考えられる。しかし, r' は σ^2 オーダーの微小量にすぎないので,
 $k_z(\lambda) \simeq 0$ となる一般の λ に対しては r' の効果は無視しうる。そこで, 以下で
は(5.100)を全ての λ に対する近似解として用いる。

(5.102)(5.103)により, r' は複素数であるので, (5.100)はRayleigh

波数 (5.95) のときでも発散することなく有限である。さらに (5.100) は条件 (5.60) を満たすので、後に示すように E_z の分散は有限で、 $\sigma \rightarrow 0$ となれば零に収束する。これは物理的予想と一致するものである。

(5.100) の特徴は、 $\sigma \rightarrow 0$ の極限において不連続関数に収束することである。これは、 $k_z(\lambda) \neq 0$ では r' が無視できるので、 $B_1(\lambda)$ は σ のオーダーであるが、 $k_z(\lambda) = 0$ では σ^{-1} のオーダーであるためである。このことは、3.3 節のスカラー波に対する近似解と類似の特異性であり、摂動法の欠点を明らかにするものでもある。即ち、 $1/\sigma$ に比例する解は、 σ の正巾のみで展開する通常の摂動法では得られない。また、 $A_1(\lambda)$ はこのような特異性をもたないので、垂直偏波の部分波だけが異常に大きい振幅をもちうることになる。

上では、 $A_1(\lambda)$ 、 $B_1(\lambda)$ を求めたので、次に A_0 、 B_0 を計算しよう。(5.88) の x 成分、 y 成分を取れば、次の二つの方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{K_z}{k} B_0 + i \int_{R^2} F^*(\lambda) \left\{ \frac{\lambda_y}{k} A_1(\lambda) + \frac{k_z(\lambda)(K_0 + \lambda_x)}{k \cdot k_0(\lambda)} \right\} k_z(\lambda) d\lambda \\ + i \int_{R^2} \frac{\lambda_x k_0(\lambda)}{k} F^*(\lambda) B_1(\lambda) d\lambda = 0, \end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} -A_0 + i \int_{R^2} F^*(\lambda) \left\{ -\frac{K_0 + \lambda_x}{k} A_1(\lambda) + \frac{k_z(\lambda) \lambda_y}{k \cdot k_0(\lambda)} B_1(\lambda) \right\} k_z(\lambda) d\lambda \\ + i \int_{R^2} \frac{\lambda_y k_0(\lambda)}{k} F^*(\lambda) B_1(\lambda) d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.105)$$

ここで、(5.93) (5.100) を (5.104) に代入して整理すれば、

$$Q_B B_0 = Q_A (2 + A_0) \quad (5.106)$$

$$Q_A = \frac{K_z}{k} \int_{R^2} \frac{\lambda_y}{k_0(\lambda)} |F(\lambda)|^2 \left\{ k_z(\lambda)(K_0 + \lambda_x) - \frac{k[k^2 \lambda_x + k_z^2(\lambda) K_0]}{k_0(\lambda)[k_z(\lambda) - k r']} \right\} d\lambda, \quad (5.107)$$

$$Q_B = \frac{K_z}{k} + \frac{1}{k} \int_{R^2} \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0(\lambda)} \left\{ k \lambda_y^2 k_z(\lambda) + \frac{(k^2 \lambda_x + k_z^2(\lambda) K_0)^2}{k_0(\lambda)[k_z(\lambda) - k r']} \right\} d\lambda \quad (5.108)$$

となる。(5.40) を満たす等方性スペクトル $|F(\lambda)|^2$ に対しては、(5.107) の被積分関数は λ_y の奇関数である。従って $Q_A = 0$ であり、(5.106) より

$$B_0 = 0 \quad (5.109)$$

となる。これは、コヒーレント反射波に交差偏波が生じないことを意味する。(5.109) を用いると、(5.93) (5.100) は、

$$A_1(\lambda) = -i(2+A_0)K_z(K_0+\lambda_x) \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)}, \quad (5.110)$$

$$B_1(\lambda) = i(2+A_0) \frac{kK_z \lambda_y F(\lambda)}{k_0(\lambda)[k_z(\lambda)-kr']}, \quad (5.111)$$

と簡単になる。これらを(5.105)に代入して、 A_0 を求めると

$$A_0 = -2 \frac{Z_s}{1+Z_s} \quad (5.112)$$

となる。ここで、等価表面インピーダンス Z_s は

$$Z_s = K_z \int_{R^2} \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda)} \left\{ k_z(\lambda)(K_0+\lambda_x)^2 + \frac{k^2 \lambda_y^2}{k_z(\lambda)-kr'} \right\} d\lambda, \quad (5.113)$$

で与えられる。右辺の微小量 r' を無視すれば、これは

$$Z_s \simeq K_z \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ k_z(\lambda) + \frac{\lambda_y^2}{k_z(\lambda)} \right\} d\lambda \quad (5.114)$$

と近似できる。次節では、この近似式を用いて数値計算を行う。

コヒーレント反射波の振幅 $\{-(1+A_0)\}$ は、(5.112)より

$$-(1+A_0) = \frac{Z_s - 1}{Z_s + 1} \quad (5.115)$$

と書ける。(5.114)では、 Z_s の実部が常に正であるので、不等式

$$|1+A_0| \leq 1, \quad \text{Re}(A_0) \leq 0 \quad (5.116)$$

が成り立つことになり、光学定理からの要請を満足する。

もし、 $|Z_s| \ll 1$ であれば、(5.115)の近似式として

$$-(1+A_0) \simeq -1+2Z_s = -1+2K_z \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ k_z(\lambda) + \frac{\lambda_y^2}{k_z(\lambda)} \right\} d\lambda, \quad (5.117)$$

が得られる。これは、Riceの二次摂動解〔分岐⁽²⁵⁾の(3.26)式〕と一致している。

以上により、 $A_0, B_0, A_1(\lambda), B_1(\lambda)$ の近似解が得られたので、次節ではこれらを用いて散乱の統計的性質を計算する。尚、(5.98)の $B_2(\lambda, \lambda')$ は条件(5.61)を満たさないの以下の数値計算では用いない。〔 B_2 の良い近似解は、 A_3, B_3 からの補正を取り入れることにより得られるが、ここでは議論しない。〕

5.6 散乱特性の計算

不規則表面のパワースペクトルとして、前章と同じガウス形スペクトル

$$|F(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 \kappa^2}{\pi} \exp(-\kappa^2 A^2), \quad (A = |\lambda|) \quad (5.118)$$

を仮定して、以下の数値計算を行う。ここで、 κ は相関距離を示すパラメータである。不規則表面の傾きの分散は、

$$\begin{aligned} \langle (\text{grad} f(T^r \omega))^2 \rangle &= \langle \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \rangle \\ &= \int_{R^2} \lambda^2 |F(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{\sigma^2 \kappa^2}{\pi} \int_{R^2} A^2 \exp(-A^2 \kappa^2) d\lambda = \sigma^2 / \kappa^2, \end{aligned} \quad (5.119)$$

となるので、 σ/κ は表面の傾きの実効値である。

A. r' の値

(5.111)の $B_1(\lambda)$ が含む補正量 r' を、(5.102)(5.103)(5.118)を用いて計算した。その結果が表 5.1 である。相関距離のパラメータ $k\kappa$ が大きくなれば、 r' の実部・虚部の絶対値がともに小さくなることがわかる。この傾向は、第3章の r' の場合(表 3.1)と同じである。〔但し、定義が異なるため、第3章の r' とは符号は逆である。〕 r' は A_2, B_2 による効果を表わす量であるから、 $k\kappa$ が大きい程、高次展開係数 A_2, B_2 の影響が小さくなるものと推定される。

表 5.1 r' の 値

| $k\kappa$ | $r' / (k\sigma)^2$ |
|-----------|---------------------|
| 0.5 | $-0.3489 + 0.9968i$ |
| 1.0 | $-0.2939 + 0.2598i$ |
| 1.5 | $-0.1442 + 0.1000i$ |
| 2.0 | $-0.0843 + 0.0599i$ |
| 2.5 | $-0.0567 + 0.0422i$ |

B. コヒーレント反射振幅

コヒーレント反射波の振幅は、(5.57)(5.109)により $\{-(1+A_0)\}$ である。(5.112)(5.114)(5.118)を用いて A_0 を入射角 θ_0 の関数として計算した。その結果を図 5.4 に示す。明らかに $\text{Re}(A_0)$ は常に負で、垂直入射($\theta_0=0$)では絶対値が大きく、 $\theta_0=\pi/2$ の水平入射では零となる。これは、(5.114)の Z_s が $K_2=k\cos\theta_0$ に比例するためである。これより、水平入射では入射電力の全

てがコヒーレント反射され、従って光学定理によりインコヒーレント散乱は発生しないことになる。

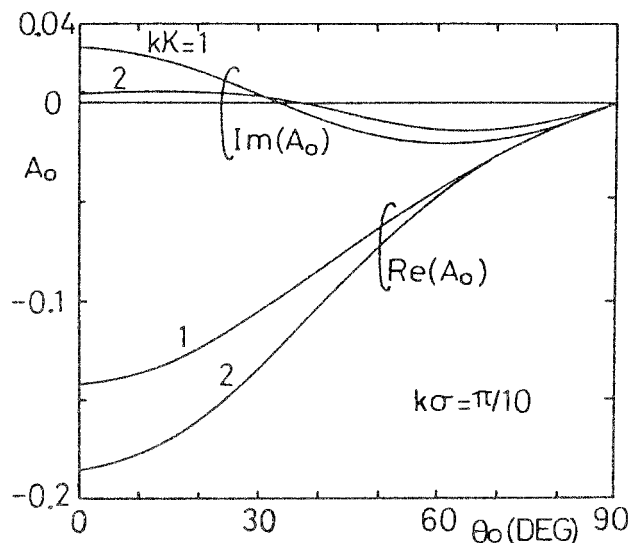


図 5.4 A_0 の入射角依存性

C. E_z の分散

(5.111) を (5.62) に代入し、高次項を無視すれば、近似評価式

$$\langle |E_z - \langle E_z \rangle|^2 \rangle \approx |2 + A_0|^2 K_z^2 \int \frac{\lambda_y^2 |F(\lambda)|^2}{|k_z(\lambda) - k r'|^2} d\lambda \quad (5.120)$$

$$(K_0 + \lambda)^2 \langle k^2$$

が得られる。これは、入射角 θ_0 、表面粗さ σ 、パワースペクトル $|F(\lambda)|^2$ の形状に依存する。ガウス形パワースペクトル (5.118) を用いて、右辺を数値積分した結果を図 5.5 に示す。表面粗さのパラメータ $k\sigma$ が小さいときには、 E_z の分散が $(k\sigma)^2$ に比例して増加している。しかし、 $k\sigma$ が $\pi/8$ をこえると、 E_z の分散の増加はゆるやかになり、 $\theta_0 = 0$ の場合には飽和・減少の傾向すらみられる。これは、(5.120) の r' と $\{-\text{Re}(A_0)\}$ が、 $k\sigma$ の増加とともに大きくなるためである。しかし、物理的には、このような分散の減少はありえないと予想される。従って、 $k\sigma \geq \pi/8$ の領域において、良い近似解を得るためには、 $B_1(\lambda)$ のみでは不十分で、 B_2 などの高次展開係数を取り入れる必要がある。

一方、 $k\sigma \rightarrow 0$ の極限において、 E_z の分散は零となる。同様に、 E_x, E_y

の分散も零に収束すること
も示される。結局、
不規則表面の凹凸がな
くなれば、電界の分散
が消滅し、散乱波は平
坦面からの反射波に収
束することになる。

これは、物理的には当
然のことである。しか
し、電界の分散は、従
来の摂動法では計算で
きず、筆者の方法によ
り初めて具体的に計算
できたことを指摘しておきたい。

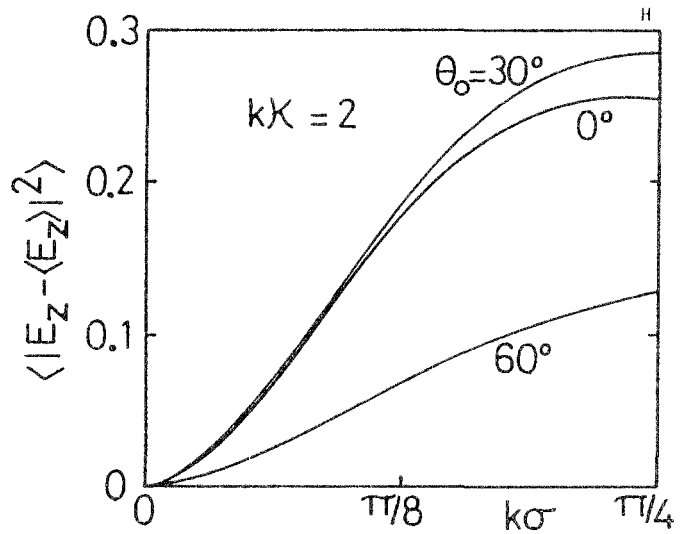


図 5.5 E_z の分散 (κ : 相関距離, σ : 表面の粗さ)

D. 光学定理

図 5.6 は、光学定理の関係を示す。ここで、コヒーレント散乱電力は B 節の A_0 を用いて計算し、一方、インコヒーレント散乱電力は A_1 と B_1 のみを用いて評価した。表面粗さのパラメータ $k\sigma$ が増加すれば、コヒーレント散乱 (図の

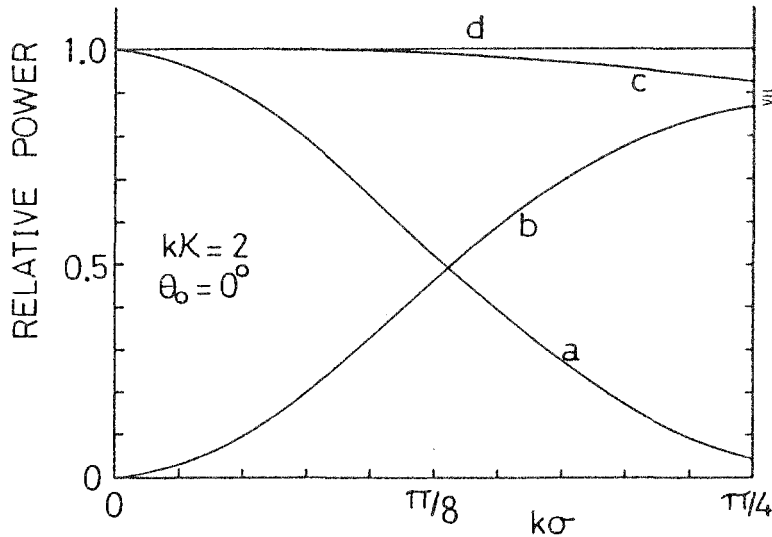


図 5.6 光学定理 (a: コヒーレント反射電力, b: インコヒーレント散乱電力, c: 全散乱電力 (a と b の和), d: 入射電力)

曲線 a) は減少し、逆にインコヒーレント散乱 (曲線 b) は増加する。この結果、全散乱電力 (曲線 c) は、入射電力 (直線 d) にほぼ一致することになり、近似的に光学定理が成立することがわかる。全散乱電力と入射電力との差は、近似解析による電力誤差を表す。 $k\sigma \geq \pi/8$ では電力誤差が増加するので、前節の近似解は、表面粗さが大きいときには近似が悪い。

この電力誤差は、表面粗さ $k\sigma$ に依存するだけでなく、入射角 θ_0 、表面の相関距離 $k\kappa$ にも依存する。(5.110)(5.111)(5.114) より、 Z_s, A_1, B_1 はいずれも $K_z = k \cos \theta_0$ に比例するので、垂直入射 ($\theta_0 = 0$) のとき、電力誤差は最大になる。電力誤差の $k\kappa$ 依存性を $\theta_0 = 0, k\sigma = \pi/10$ の条件で評価すれば、4.0% ($k\kappa = 0.5$)、5.5% ($k\kappa = 1.0$)、1.1% ($k\kappa = 2$) となる。このことから、表面の勾配が小さくなれば ($k\kappa$ が大きくなれば)、一般に電力誤差は小さくなると推定される。

以上のことから、前節の近似解は、表面粗さと表面の傾きがともに小さければ、よい近似解になるものと推定できる。

E. インコヒーレント散乱の角度分布

(5.110)(5.111) を (5.73)(5.74) に代入して、整理すれば、

$$S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = S_{HH}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) + S_{HV}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0), ,$$

$$S_{HH}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = k^4 |2 + A_0|^2 \cos \theta \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi |F(A)|^2, \quad (5.121)$$

$$S_{HV}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = k^4 |2 + A_0|^2 \cos \theta \cos^2 \theta_0 \frac{\sin^2 \phi}{|\cos \theta - \gamma'|^2} |F(A)|^2, \quad (5.122)$$

但し、

$$A = k \sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi}, \quad \phi_0 = 0$$

である。 S_{HH} は $\cos^2 \phi$ に比例するので、入射波動ベクトル K_0 から見て横方向 (図 5.1 では、 $\pm y$ 方向) には、水平偏波の散乱波が生じず、前方 ($\phi = 0$) と後方 ($\phi = \pi$) に強い。逆に、 S_{HV} は $\sin^2 \phi$ に比例するので、垂直偏波の散乱波は、横方向には強いが、前方・後方には生じないことがわかる。従って、前節の一次近似解では、後方散乱に交差偏波は生じない。後方散乱における交差偏波は、高次の展開係数 A_2, B_2 により生ずる効果である。

次に、 S の θ 依存性を見ることにする。 S_{HH} は因子 $\cos^2 \theta$ をもつにすぎないので、 θ に対する変化はゆるやかであるが、一方、 S_{HV} は、分母に因子 $|\cos \theta - \gamma'|^2$ をもつので、 $\theta \simeq \pi/2$ で大きな値をもち、異常散乱特性を示すこ

とになる。図 5.7 は、インコヒーレント散乱の角度依存性を示す。

$\theta \simeq \pi/2$ での鋭いピークは、この異常散乱によるものである。

$A_0 = r' = 0$ とおけば、(5.110)(5.111) は一次摂動解と一致する。

(5.121)(5.122) で $A_0 = r' = 0$ と置けば、 S_{HH} は有限であるが、 S_{HV} は、 $(\cos \theta)^{-1}$ に比例するので、 $\theta = \pi/2$ のとき発散することになる。

F. 後方散乱断面積

単位面積あたりの散乱断面積は、(5.75)(5.76)(5.121)(5.122) より

$$\sigma^0(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = \sigma_{HH}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) + \sigma_{HV}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)$$

$$\sigma_{HH}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = 4\pi k^4 |2 + A_0|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi |F(A)|^2, \quad (5.123)$$

$$\sigma_{HV}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = 4\pi k^4 |2 + A_0|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 \frac{\sin^2 \phi}{|\cos \theta - r'|^2} |F(A)|^2, \quad (5.124)$$

$$A = k \sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi}$$

となる。後方 ($\theta = \theta_0, \phi = \pi$) への散乱断面積を σ^B と書けば、

$$\sigma_{HH}^B(\theta) = 4\pi k^4 |2 + A_0|^2 \cos^4 \theta |F(2k \sin \theta)|^2 \quad (5.125)$$

$$\sigma_{HV}^B(\theta) = 0 \quad (5.126)$$

となり、後方散乱は交差偏波を含まないことがわかる。図 5.8 は (5.125) を用いて、後方散乱断面積を計算したものである。 $k\kappa$ が大きいと不規則表面の勾配は小さいので、 $\sigma_{HH}^B(\theta)$ は θ の小さいところで大きい値をとる。逆に $k\kappa$ が 0.5 と小さい場合には、 $\sigma_{HH}^B(\theta)$ の変化は比較的ゆるやかである。

他の統計的散乱特性と異なり、散乱断面積だけは $A_0 = r' = 0$ としても発散しない。実際 (5.123) ~ (5.125) より、

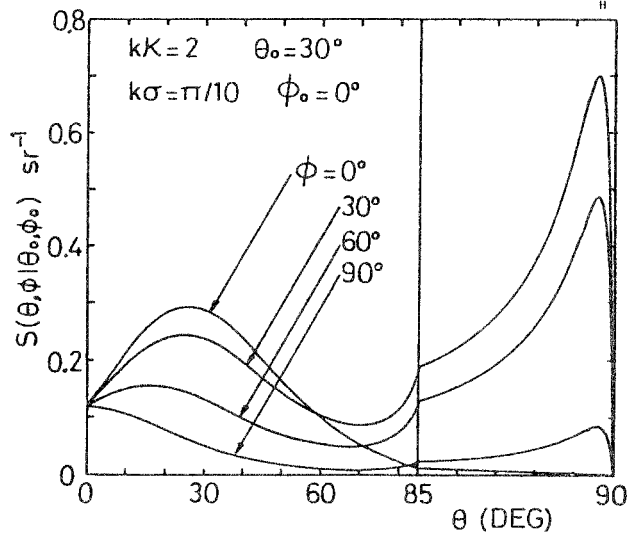


図 5.7 インコヒーレント散乱の角度分布
〔 (θ_0, ϕ_0) : 入射角, (θ, ϕ) : 散乱角, 但し、 ϕ_0 は $-x$ 軸から、 ϕ は x 軸から測る〕

$$\sigma_{HH}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = 16\pi k^4 \cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi |F(A)|^2 \quad (5.127)$$

$$\sigma_{HV}(\theta, \phi | \theta_0, 0) = 16\pi k^4 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \phi |F(A)|^2 \quad (5.128)$$

$$\sigma_{HH}^B(\theta) = 16\pi k^4 \cos^4 \theta |F(2k \sin \theta)|^2 \quad (5.129)$$

となる。これらの結果は一次摂動解より得られるものと一致する。図 5. 8 の破線は、(5.129) によるものである。表面粗さ $k\sigma$ が小さい場合には図 5. 4 のように A_0 は微小量であるから、摂動解による (5.129) と我々の (5.125) との差は少ない。実際、図 5. 8 における両者の差は高々 0.7 dB にすぎない。しかし、(5.128) では $\theta = \pi/2$ のとき σ_{HV} が零とならないので、 $\theta = \pi/2$ 方向への散乱波の電力フラックスは発散していることに注意されたい。

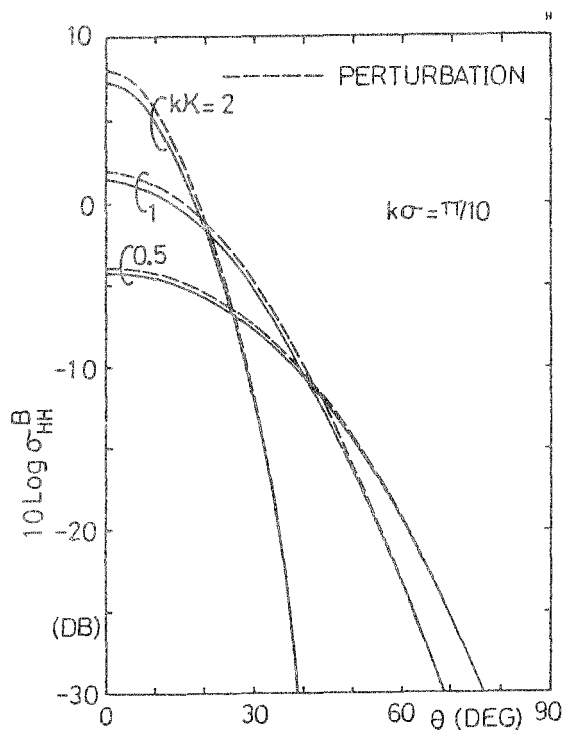


図 5. 8 後方散乱断面積（水平偏波入射—水平偏波散乱）

G. 表面波の平均電力流

(5.110) (5.111) を (5.82) に代入すれば、表面波平均電力流の近似式

$$P_s \simeq \frac{|2+A_0|^2 K_z^2}{2k} \int \frac{(K_0+\lambda_x) |F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda) \sqrt{(K_0+\lambda)^2 - k^2}} \left\{ (K_0+\lambda_x)^2 + \frac{k^2 \lambda_y^2}{|k_z(\lambda) - k r'|^2} \right\} d\lambda \quad (5.130)$$

$(K_0+\lambda)^2 > k^2$

が得られる。因子 $K_z^2 = k \cos \theta_0$ をもつため、これは水平入射 ($\theta_0 = \pi/2$) で零となる。垂直入射 ($\theta_0 = 0$, $K_0 = 0$) のときには、被積分関数が λ_x の奇関数となるので、 $P_s = 0$ となる。これは、幾何学的対称性により、 x 方向への流れが逆方向への流れによって打ち消されるためである。従って P_s は、入射角が 30° 近傍で最大値をとることになる。図 5.9 は、1次元の場合 (図 2.8) と類似した結果である。

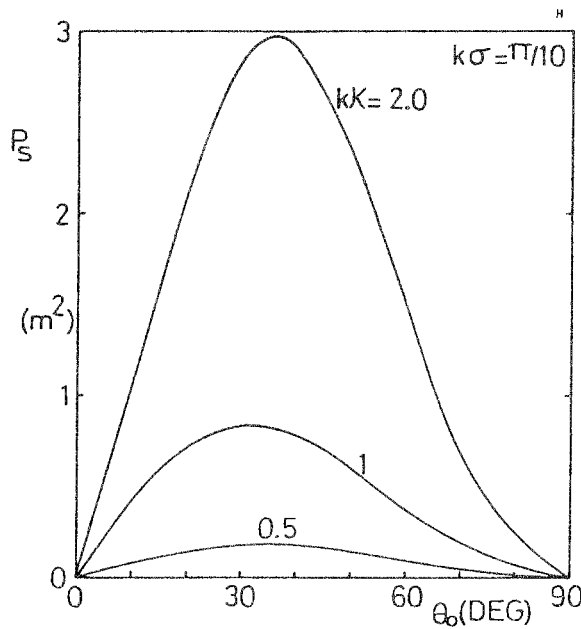


図 5.9 表面波の平均電力流 (κ : 相関距離, θ_0 : 入射角)

第六章 不規則表面による電磁波の散乱—垂直偏波入射

6.1 ま え が き

前章では平面電磁波の散乱を定式化し、水平偏波入射の場合の新しい波動解を導いた。この波動解を用いて種々の統計的散乱特性を具体的に計算することができた。この章では、前章の続きとして、垂直偏波入射の場合を解析する。垂直偏波入射の場合、Rice の摂動解は、限定された特別の場合を除いて、コヒーレント反射とインコヒーレント散乱の双方に発散を生ずるため、散乱の統計量が正しく求められない。これに対して、本章で導く波動関数は発散することがないので、散乱の統計的性質を具体的に計算することができる。しかし、得られた波動関数は、インコヒーレント散乱のみならずコヒーレント散乱に対しても異常を生ずる。すなわち、水平偏波の場合と同様、Rayleigh 波数をもつ部分散乱波の振幅は、異常に大きくなる。さらに、水平に近い入射角に対しては、コヒーレント散乱がほとんど消滅し、インコヒーレント散乱が逆に大きく支配的となる。この様な異常散乱特性は、第3章の結果と類似したものである。

この章は前章の続きであるので、同じ記号・定義を用いる。次節では、解析の基礎方程式について述べる。6.3 節では、垂直偏波入射に対するウィナー展開の展開係数を近似的に求める。6.4 節では、近似的に求めた展開係数を用いて、散乱の統計的性質を具体的に計算する。コヒーレント散乱の複素振幅と E_z の分散、光学定理、インコヒーレント散乱の角度分布、散乱断面積、表面波の平均電力流を求め、図示している。これらの統計量は、従来の理論では導けないものである。

6.2 散乱問題の定式化

無限に広い不規則表面による平面電磁波の散乱を考える。(図 6.1 参照)。前章と同じ記号と定義を用いるが、簡単に記号の説明を繰り返す。二次元 xy 平面 $R^2 = (-\infty \leq x, y \leq \infty)$ 内の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y)$ と書き、三次元空間の座標は対 (\mathbf{r}, z) で表す。直交座標系 (x, y, z) の座標軸方向の単位ベクトルを $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ と書き、確率を定義する見本空間 Ω 内の見本点を ω で示す。簡単のため、記号 ω をしばしば落として式を書くことがある。完全導体の不規則表面は、一様等方ガウス確率場で、(5.39) と同じウィナー積分

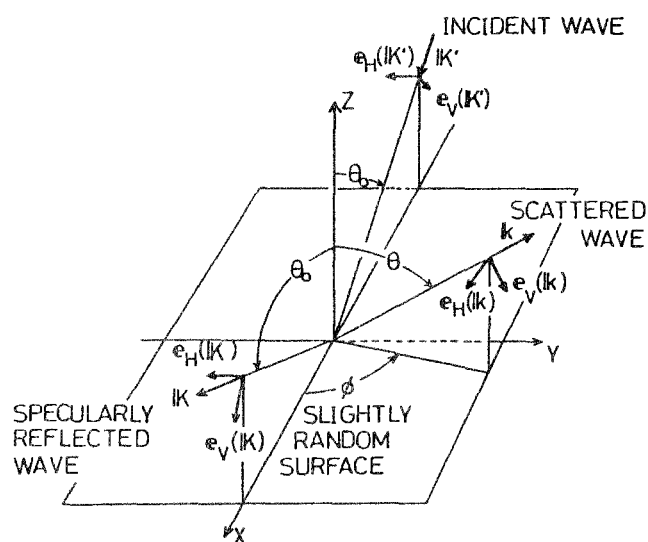


図 6.1 不規則表面による平面電磁波の散乱
(θ_0 : 入射角, (θ, ϕ): 散乱角)

$$z = f(T^r \omega) = \int_{R^2} e^{i\lambda r} F(\lambda) dB(\lambda) \quad (6.1)$$

$$F^*(\lambda) = F(-\lambda), |F(\lambda)|^2 = |F(A)|^2, (A = |\lambda|) \quad (6.2)$$

により表現されるものと仮定する。ここで、 T^r は見本空間 Ω 内における保測変換を表わし、 $dB(\lambda)$ は二次元複素ガウスランダム測度である。(6.2) は $f(T^r \omega)$ を実の等方確率場とするための条件である。 $dB(\lambda)$ の性質 (A131) により、 $f(T^r \omega)$ の平均値と分散は、

$$\begin{aligned} \langle f(T^r \omega) \rangle &= 0 \\ \sigma^2 = \langle f^2(T^r \omega) \rangle &= \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。ここで、記号 $\langle \rangle$ は Ω 上の平均を示し、 $|F(\lambda)|^2$ は $f(T^r \omega)$ のパワースペクトルである。 σ は、不規則表面の粗さを表すパラメータであり、波長に比べて十分小さいものとする。

マックスウェルの方程式より、電界 $E(z, r, \omega)$ は自由空間 ($z > f(T^r \omega)$) 中で次の方程式を満たす。

$$[\nabla^2 + k^2] E(z, r, \omega) = 0 \quad (6.4)$$

$$\text{div } E(z, r, \omega) = 0 \quad (6.5)$$

(6.1) で表現される完全導体表面の粗さが小さく (σ が微小量), かつ表面の勾配が小さいと仮定して, (5.8) と同じ近似境界条件

$$E_0(0, r, \omega) + f(T^r \omega) \frac{\partial}{\partial z} E_0(z, r, \omega) \Big|_{z=0} + g \operatorname{grad} f(T^r \omega) E_z(0, r, \omega) = 0 \quad (6.6)$$

を用いる。ここで, $E_0(z, r, \omega)$ は $E(z, r, \omega)$ の xy 平面への射影であり, $E_z(z, r, \omega)$ は z 成分である。

不規則表面を平坦面 ($z=0$) からの摂動と考え, 電界 E を平坦面の場合の電界 (無摂動電界) E^0 が摂動を受けたものと見なして

$$E(z, r, \omega) = E^0(z, r) + E^S(z, r, \omega) \quad (6.7)$$

と書く。ここで, E^0 は, 平面 ($z=0$) の上で境界条件

$$e_z \times E^0(z, r) = 0, \quad (z=0) \quad (6.8)$$

を満たす。一方, $E^S(z, r, \omega)$ は表面の凹凸による摂動電界を表わす。

入射波数ベクトルを K' と書き, 鏡面反射の波数ベクトルを K とすると無摂動電界 $E^0(z, r)$ は, (5.23) ~ (5.29) により

$$E^0(z, r) = e^{iK_0 x} \{ e_v(K') e^{-iK_z z} + e_v(K) e^{iK_z z} \} \quad (6.9)$$

$$e_v(K') = -(K_z e_x + K_0 e_z)/k, \quad e_v(K) = (K_z e_x - K_0 e_z)/k \quad (6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} K' &= K_0 - e_z K_z, \quad K = K_0 + e_z K_z \\ K_0 &= K_0 e_x = k \sin \theta_0 e_x, \quad K_z = \sqrt{k^2 - K_0^2} = k \cos \theta_0 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

と書ける。但し, 入射面を xz 面とし, 入射角を θ_0 とした (図 6.1)。

$e_v(K')$ と $e_v(K)$ は, それぞれ波動ベクトル K' と K に直交する垂直偏波ベクトルである。

不規則表面が一様確率場であるので, 摂動電界 $E^S(z, r, \omega)$ は次の形をもつ (5.2C 節参照)。

$$E^S(z, r, \omega) = e^{iK_0 x} U(z, T^r \omega) \quad (6.12)$$

ここで, $U(z, T^r \omega)$ は r に関する一様ベクトル確率場であり, z に依存する。

これは, 不規則表面 $f(T^r \omega)$ の汎函数として求めるべきものであるが, (6.1) の関係により $dB(\lambda)$ の確率汎函数と見なして, ウィナー展開により表現する。このとき, 電界 $E^S(z, r, \omega)$ は前章 (5.42) により,

$$\begin{aligned}
E^S(z, r, \omega) = & e^{iK_0 x} \left\{ e_H(K) A_0 + e_V(K) B_0 \right\} e^{iK_z z} \\
& + e^{iK_0 x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^2} \int_{R^2} \cdots \int_{R^2} \left\{ e_H[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n] A_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \right. \\
& + e_V[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n] B_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \left. \right\} e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) r} \\
& \times e^{ik_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) z} h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)], \quad (6.13)
\end{aligned}$$

と表現できる。ここで、 $k_z(\lambda)$ は、ブラッグ・ベクトル λ に関して定まる波動ベクトル $k(\lambda)$ の z 成分であり、関係式

$$k(\lambda) = k_0(\lambda) + k_z(\lambda) e_z, \quad k^2(\lambda) = k^2 \quad \left. \vphantom{k(\lambda)} \right\} \quad (6.14)$$

$$k_0(\lambda) = k_0 + \lambda, \quad k_0(\lambda) = |k_0(\lambda)| = \sqrt{(K_0 + \lambda_x)^2 + \lambda_y^2}$$

$$\begin{aligned}
k_z(\lambda) &= \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} \geq 0, \quad (k^2 \geq (K_0 + \lambda)^2) \\
&= i \sqrt{(K_0 + \lambda)^2 - k^2}, \quad (k^2 < (K_0 + \lambda)^2) \quad (6.15)
\end{aligned}$$

により定義される。 $e_H[\lambda]$ と $e_V[\lambda]$ は、 $k(\lambda)$ に直交する水平偏波ベクトルと垂直偏波ベクトルであり、(5.46) (5.47) で定義した。未知の展開係数 A_n と B_n は、それぞれ、水平偏波の部分波散乱振幅と垂直偏波の部分波散乱振幅であり、次節で求める。 $h^{(n)}$ は、複素ウィナーエルミット微分式で、汎函数展開 (6.13) の直交完備な展開基底である。

このような定義により、(6.13) は項別に波動方程式 (6.4) と (6.5) を満たす。

(コヒーレント波)

(A141) により、複素ウィナーエルミット微分式の平均は、0 次を除いて零であるから、(6.7) (6.9) (6.13) により、コヒーレント電界は、

$$\begin{aligned}
\langle E(z, r, \omega) \rangle &= E^0(z, r) + \langle E^S(z, r, \omega) \rangle \\
&= e^{iK_0 x} \left\{ e_V(K') e^{-iK_z z} + \left[e_H(K) A_0 + e_V(K) (1 + B_0) \right] e^{iK_z z} \right\} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

となる。一様で等方な不規則表面に対しては、後に示すように A_0 が零となるので、コヒーレント散乱は交差偏波を含まず、コヒーレント波に対する反射係数は $(1 + B_0)$ となる。

(E_z の分散)

E_z の分散は、(6.13) と (A141) により容易に定式化できる。5.4 B 節と同様の計算により、 E_z の分散が有限であるためには、 B_n が次の条件

$$\int_{R^2} k_0^2(\lambda) |B_1(\lambda)|^2 d\lambda < \infty, \quad (6.17)$$

$$\int_{R^2} \int_{R^2} k_0^2(\lambda_1 + \lambda_2) |B_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 < \infty, \quad (6.18)$$

を満たす必要があることがわかる。この条件の下では、遠方 ($z = \infty$) での E_z の分散は、

$$\begin{aligned} \langle |E_z - \langle E_z \rangle|^2 \rangle &= \frac{1}{k^2} \int_{(K_0 + \lambda)^2 < k^2} k_0^2(\lambda) |B_1(\lambda)|^2 d\lambda \\ &+ \frac{2}{k^2} \iint_{(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 < k^2} k_0^2(\lambda_1 + \lambda_2) |B_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \quad (6.19) \end{aligned}$$

で与えられる。この左辺は、 x と z に依存しない定数である。

6.3 展開係数の近似解

(6.13) における未知展開係数 A_n, B_n が得られると、電界 $E(z, r, \omega)$ が (6.7) (6.9) により逆に定まる。境界条件 (6.6) を用いて、展開係数をこの節では近似的に求める。

展開係数 A_n, B_n に関する方程式は、5.5 節と同様の方法によって導くことができる。すなわち、(6.1) (6.7) (6.9) (6.13) を (6.6) へ代入し、複素ウィナーエルミット多項式の漸化式 (A139) と直交性 (A141) を用いれば、

$$\begin{aligned} -A_0 e_y + B_0 \frac{K_z}{k} e_x + i \int_{R^2} F^*(\lambda) k_z(\lambda) \{e_H[\lambda] A_1(\lambda) + e_{v0}[\lambda] B_1(\lambda)\} d\lambda \\ - i \int_{R^2} \lambda F^*(\lambda) e_{vz}[\lambda] B_1(\lambda) d\lambda = 0, \quad (6.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{e_H[\lambda] A_1(\lambda) + e_{v0}[\lambda] B_1(\lambda)\} + i K_z F(\lambda) \{(2 + B_0) K_z e_x / k - A_0 e_y\} \\ + 2i \int_{R^2} k_z(\lambda + \lambda') \{e_H[\lambda + \lambda'] A_2(\lambda, \lambda') + e_{v0}[\lambda + \lambda'] B_2(\lambda, \lambda')\} F^*(\lambda') d\lambda' \\ - i \lambda F(\lambda) (2 + B_0) K_0 / k - 2i \int_{R^2} \lambda' F^*(\lambda') B_2(\lambda, \lambda') e_{vz}[\lambda + \lambda'] d\lambda' = 0, \quad (6.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{A_2(\lambda, \lambda') e_H[\lambda + \lambda'] + B_2(\lambda, \lambda') e_{v0}[\lambda + \lambda']\} \\ + i k_z(\lambda) \{A_1(\lambda) e_H[\lambda] + B_1(\lambda) e_{v0}[\lambda]\} F(\lambda') / 2 \\ + i k_z(\lambda') \{A_1(\lambda') e_H[\lambda'] + B_1(\lambda') e_{v0}[\lambda']\} F(\lambda) / 2 \\ + i \lambda F(\lambda) B_1(\lambda') e_{vz}[\lambda'] / 2 + i \lambda' F(\lambda') B_1(\lambda) e_{vz}[\lambda] / 2 + \dots = 0, \quad (6.22) \end{aligned}$$

等々が得られる。

(6.3)により $F(\lambda)$ は σ のオーダーの微小量であるので、これらの方程式より、 A_0 と $K_z B_0$ は高々 σ^2 のオーダーの微小量であり、 A_1 と $|\mathbf{e}_{v0}[\lambda] B_1(\lambda)|$ は高々 σ^1 のオーダーであることがわかる。同様に、 A_2 と $|\mathbf{e}_{v0}[\lambda_1 + \lambda_2] B_2(\lambda_1, \lambda_2)|$ は高々 σ^2 オーダーの関数である。十分小さい σ を仮定して、以下では、 A_0 , B_0 , $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ のみを含む近似解を求める。しかし、ここで注意すべきことは、 $K_z B_0$ は σ^2 オーダーで微小量であるが、 $K_z = 0$ となる場合には B_0 が異常に大きくなりうることである。同様に、Rayleigh 波数

$$|\mathbf{k} \mathbf{e}_{v0}[\lambda]| = k_z(\lambda) = \sqrt{k^2 - (K_0 + \lambda)^2} = 0 \quad (6.23)$$

を与える λ に対しては、 $|B_1(\lambda)|$ は σ^1 オーダーとは限らず異常に大きな値をもつ可能性がある。

連立方程式 (6.20) ~ (6.22) は、5.5 節と全く同じ方法により近似的に解くことができる。しかし、(6.21) において、置換え、

$$\begin{aligned} (2 + B_0) &\rightarrow B_0 \\ A_0 &\rightarrow (2 + A_0) \end{aligned} \quad \} \quad (6.24)$$

をすれば、(6.20) ~ (6.22) は前章の (5.88) ~ (5.90) と全く同じ方程式となる。このことに着目すれば、前章の近似解 (5.93) (5.100) に (6.24) と逆の置換を施すことにより、近似解 $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ が得られる。すなわち、

$$A_1(\lambda) = -i \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)} \{ K_z(K_0 + \lambda_x) A_0 + k \lambda_y (2 + B_0) \} \quad (6.25)$$

$$B_1(\lambda) = i \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)} \cdot \frac{k K_z \lambda_y A_0 + (2 + B_0) [K_0 k_0^2(\lambda) - k^2(K_0 + \lambda_x)]}{k_z(\lambda) - k r'} \quad (6.26)$$

ここで、 r' は A_2 と B_2 からの補正量であり、(5.102) (5.103) で定義した。 $[r'$ の数値例は、表 5.1 参照]。(6.25) (6.26) において $A_0 = B_0 = r' = 0$ と置けば、表現と記号の差を除いて Rice の一次摂動解と一致する。この場合には、 $A_1(\lambda)$ はあらゆる λ に関して有限で発散することがないが、一方、 $B_1(\lambda)$ は Rayleigh 波数 (6.23) において発散することになる。このため、摂動解では、単位面積あたりの微分散乱断面積を除いて散乱の統計諸量が全て発散することになる。しかし、 r' は複素数であるから、(6.26) は Rayleigh 波数 (6.23) においても発散することがなく有界である。さらに、(6.26) は E_z の分散が有限であるための条件 (6.17) を満たす。後の図が示すように、 E_z の分散は、 $k\sigma \ll 1$ では $k^2 \sigma^2$ に比例し、 $k\sigma \rightarrow 0$ の極限で零に収束する。この結果、表面

の不規則性が消滅するとき，波動関数 $E(z, r, \omega)$ は，平坦面上の無振動電界 $E^0(z, r)$ に収束することになる。しかし，この収束は，第3章のノイマン条件の場合や前章の場合と同様，自乗確率平均収束にすぎないことに注目すべきである。実際 $k_z(\lambda) \neq 0$ のときには $B_1(\lambda)$ は高々 σ のオーダーであるが， $k_z(\lambda) = 0$ となる λ に関しては， $B_1(\lambda)$ は σ^{-1} オーダーとなる。このため，Rayleigh 波数 (6.23) をもつ垂直偏波の部分波は異常に大きい振幅をもつことになる。

上では， $A_1(\lambda)$ ， $B_1(\lambda)$ を求めたので，次に A_0 ， B_0 を計算する。(6.20) の x 成分， y 成分を取れば， A_0 と B_0 に関する連立方程式

$$A_0 + \frac{i}{k} \int_{R^2} F^*(\lambda) \frac{k_z(\lambda)}{k_0(\lambda)} \{A_1(\lambda)(K_0 + \lambda_x)k - B_1(\lambda)k_z(\lambda)\lambda_y\} d\lambda \\ - \frac{i}{k} \int_{R^2} \lambda_y F^*(\lambda) k_0(\lambda) B_1(\lambda) d\lambda = 0, \quad (6.27)$$

$$B_0 \frac{K_z + i}{k} \int_{R^2} F^*(\lambda) \left\{ \frac{k_z(\lambda)\lambda_y}{k_0(\lambda)} A_1(\lambda) + \frac{k^2(K_0 + \lambda_x) - K_0 k_0^2(\lambda)}{k \cdot k_0(\lambda)} B_1(\lambda) \right\} d\lambda = 0, \quad (6.28)$$

を得る。近似解 (6.25) (6.26) を (6.27) に代入して，整理すれば，

$$Q_A A_0 = Q_B (2 + B_0) \quad (6.29)$$

$$Q_A = 1 + K_z \int_{R^2} \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda)} \left\{ k_z(\lambda)(K_0 + \lambda_x)^2 + \frac{k^2 \lambda_y^2}{k_z(\lambda) - k r'} \right\} d\lambda \quad (6.30)$$

$$Q_B = -k \int_{R^2} \lambda_y \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda)} \left\{ k_z(\lambda)(K_0 + \lambda_x) + \frac{K_0 k_0^2(\lambda) - k^2(K_0 + \lambda_x)}{k_z(\lambda) - k r'} \right\} d\lambda \quad (6.31)$$

となる。ここで， $|F(\lambda)|^2$ は等方性の条件 (6.2) を満たすことに注意すれば，(6.31) の被積分関数は λ_y に関する奇関数であることがわかる。従って， Q_B は零であるから，(6.29) により，

$$A_0 = 0 \quad (6.32)$$

となる。これは，コヒーレント反射には交差偏波が生じないことを示すものである。〔(6.16) 参照〕。

(6.32) を用いれば，(6.25) (6.26) は次式のように簡単になる。

$$A_1(\lambda) = -i \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)} k \lambda_y (2 + B_0), \quad (6.33)$$

$$B_1(\lambda) = i \frac{F(\lambda)}{k_0(\lambda)} \cdot \frac{(2 + B_0)[K_0 k_0^2(\lambda) - k^2(K_0 + \lambda_x)]}{k_z(\lambda) - k r'} \quad (6.34)$$

これらを(6.28)に代入して、 B_0 について解けば、

$$B_0 = -2 \frac{Z_s}{1 + Z_s}, \quad (6.35)$$

$$Z_s = \frac{1}{K_z} \int_{R^2} \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda)} \left\{ k^2 \lambda_y k_z(\lambda) + \frac{[k^2(K_0 + \lambda_x) - K_0 k_0^2(\lambda)]^2}{k_z(\lambda) - k r'} \right\} d\lambda, \quad (6.36)$$

となる。ここで、 Z_s は不規則表面の等価表面インピーダンスである。 $r' = 0$ としても右辺の積分は収束するので、(6.36)は、

$$Z_s \simeq \frac{1}{K_z} \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{k^2 \lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + K_z^2 k_z(\lambda) \right\} d\lambda \quad (6.37)$$

で近似できる。次節では、簡単のため、この近似式を用いて数値的に B_0 を求めている。

(6.35)により、コヒーレント反射の振幅($1 + B_0$)は

$$(1 + B_0) = \frac{1 - Z_s}{1 + Z_s} \quad (6.38)$$

となる。これは、位相が π 異なること、 Z_s の定義が異なることを除けば、前章の(5.115)と全く同じである。(6.37)では、 Z_s の実部は非負であるから、(6.38)より不等式

$$|1 + B_0| \leq 1, \quad \text{Re}(B_0) \leq 0 \quad (6.39)$$

が得られる。これは、コヒーレント反射振幅が入射波の振幅よりも小であることを意味している。

(6.37)の特徴は、 Z_s が $K_z = k \cos \theta_0$ に反比例することである。このため、 $K_z \neq 0$ では、 Z_s は σ^2 のオーダーの微小量となり、(6.35)により B_0 も σ^2 オーダーの微小量である。しかし、入射角 θ_0 が $\pi/2$ のときには、 $K_z = 0$ となるので、 Z_s は発散し、 B_0 は -2 になる。さらに注意すべきことは、 $\theta_0 \simeq \pi/2$ で $Z_s \simeq 1$ となるので、コヒーレント反射振幅($1 + B_0$)が非常に小さくなりうることである。このため、後の図が示すように、 B_0 は入射角 θ_0 に対して大きく変化することになる。

この様な B_0 の変化は、コヒーレント散乱振幅($1 + B_0$)を変動させるばかりではなく、インコヒーレント散乱へも陽に影響を与える。これは(6.33)

(6.34)の $A_1(\lambda)$ 、 $B_1(\lambda)$ がともに共通因子($2 + B_0$)を含んでいるためである。とくに、水平入射($\theta_0 = \pi/2$)では、この共通因子($2 + B_0$)が零となるため、インコヒーレント散乱が消滅することになる。この様な B_0 のインコヒ

ーレント散乱へのフィードバック効果は、多重散乱によるものと考えられ、通常の摂動法では得られないものである。

入射角 θ_0 が小さく、 $|Z_s| \ll 1$ のときには、(6.38) の近似式として

$$1+B_0 \cong 1-2Z_s = 1 - \frac{2}{K_z} \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{k^2 \lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + K_z^2 k_z(\lambda) \right\} d\lambda, \quad (6.40)$$

が得られる。これは、Rice⁽²⁵⁾ の二次摂動解と一致している。この式は、水平入射 ($\theta_0 = \pi/2$) では発散するので、正しいコヒーレント散乱振幅を与えない。また、 σ が大きく、 $\theta_0 \cong \pi/2$ では、 $\text{Re}(1+B_0)$ が容易に -1 をこえるので、不等式 (6.39) を満たさない。

この様な摂動解の難点は、(6.38) では起こらない。(6.38) に於いては発散する量はインピーダンスであるので、物理的に無理なく理解できる利点もある。

特別の場合として垂直入射 ($\theta_0 = 0$) の場合を考えよう。この場合には、垂直偏波の入射は幾何学的にありえず、水平偏波入射となる。但し、 $K_z = 0$ 、 $K_0 = k$ とおけば、(6.10) より $\mathbf{e}_y(K') = -\mathbf{e}_x$ であり、一方、(5.25) により $\mathbf{e}_H(K') = -\mathbf{e}_y$ であるから、前章の解とこの章の解とは z 軸のまわりの $\pi/2$ の回転を除けば一致するはずである。次にこのことを確かめよう。

垂直偏波の場合の展開係数には、添字 v を、水平偏波に対しては添字 H を付けることにする。 $K_0 = 0$ 、 $K_z = k$ 、 $k_0(\lambda) = |\lambda|$ 、とおけば、(6.33)、(6.34) (6.36) は、

$$A_1^v(\lambda) = -i \frac{F(\lambda)}{|\lambda|} k \lambda_y (2 + B_0^v) \quad (6.41)$$

$$B_1^v(\lambda) = -i \frac{F(\lambda)}{|\lambda|} \frac{(2 + B_0^v) k^2 \lambda_x}{k_z(\lambda) - k r'} \quad (6.42)$$

$$Z_s^v = k \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{\lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + k_z(\lambda) \right\} d\lambda \quad (6.43)$$

となる。一方、(5.110) (5.111) (5.114) は、

$$A_1^H(\lambda) = -i \frac{(2 + A_0^H) k \lambda_x}{|\lambda|} F(\lambda) \quad (6.44)$$

$$B_1^H(\lambda) = i (2 + A_0^H) \frac{k^2 \lambda_y}{|\lambda| [k_z(\lambda) - k r']} F(\lambda) \quad (6.45)$$

$$Z_s^H = k \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ k_z(\lambda) + \frac{\lambda_y^2}{k_z(\lambda)} \right\} d\lambda \quad (6.46)$$

となる。水平偏波から垂直偏波へ移るには、 z 軸のまわりを反時計方向に $\pi/2$ 回転すればよい (図 6.2)。(6.44)~(6.46) において、この様な回転

$$\left. \begin{aligned} (H \rightarrow V) \quad \lambda_x &\rightarrow -\lambda_y \\ \lambda_y &\rightarrow \lambda_x \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

を施せば、(6.41)~(6.43) と一致することが容易にわかる。

但し、 $F(\lambda)$ 自身が等方で、

$F(\lambda) = F(\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2})$ であると仮定する。

この様に、垂直入射の場合には、前章の解とこの章の解とは一致するので、全ての散乱特性も一致することになる。

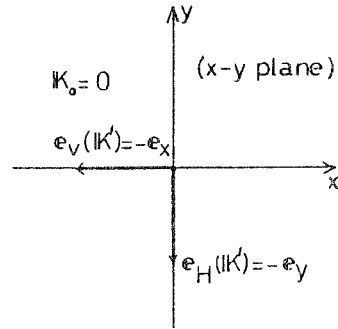


図 6.2 垂直入射 ($\theta_0 = 0$) の場合の入射偏波ベクトル

6.4 散乱特性の計算

前節で近似解を求めたので、ここでは (5.118) と同じガウス形パワースペクトル

$$|F(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 \kappa^2}{\pi} \exp(-\kappa^2 A^2); \quad (A = |\lambda|) \quad (6.48)$$

を仮定して、散乱特性を計算する。ここで κ は相関距離を表すパラメータである。

A. コヒーレント散乱

(6.35)(6.37) より、係数 B_0 を入射角 θ_0 の関数として計算し、図 6.3 に結果を示す。入射角 θ_0 が小さく 60° 以下であれば、 B_0 は $k^2 \sigma^2$ のオーダーの微小量である。しかし、 θ_0 が $\pi/2$ に近づくと、 B_0 は急激に減少して -2 に収束する。この様な B_0 の急激な変化は、

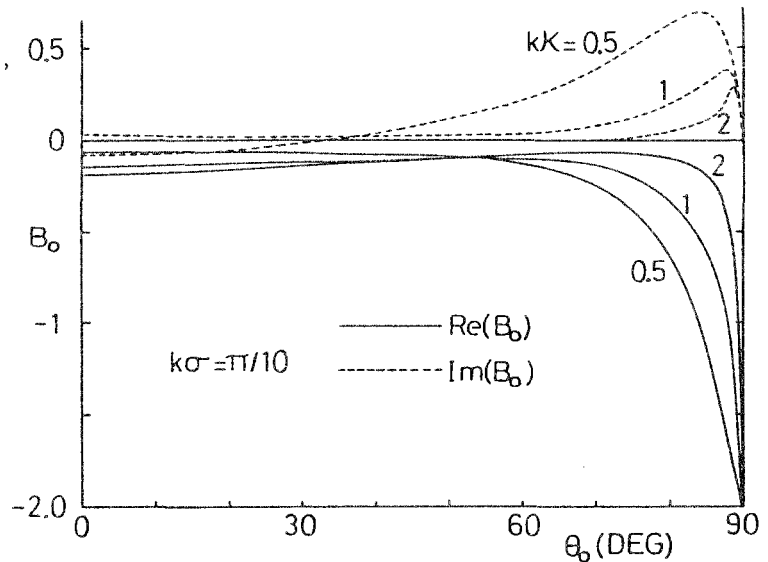


図 6.3 係数 B_0 の入射角 θ_0 依存性

水平偏波入射の場合（図 5. 4 参照）には起らず，垂直偏波入射に固有の現象である。

図 6. 4 は，コヒーレント反射振幅（ $1+B_0$ ）の絶対値と位相をプロットしたものである。（比較のため，水平偏波入射のときのコヒーレント反射振幅と位相を同時に図示した）。入射角 θ_0 が 90° に近いところで，コヒーレント散乱振幅が最小となり反射位相が急激に変化することが分かる。これは，図 3. 4 と類似の性質である。

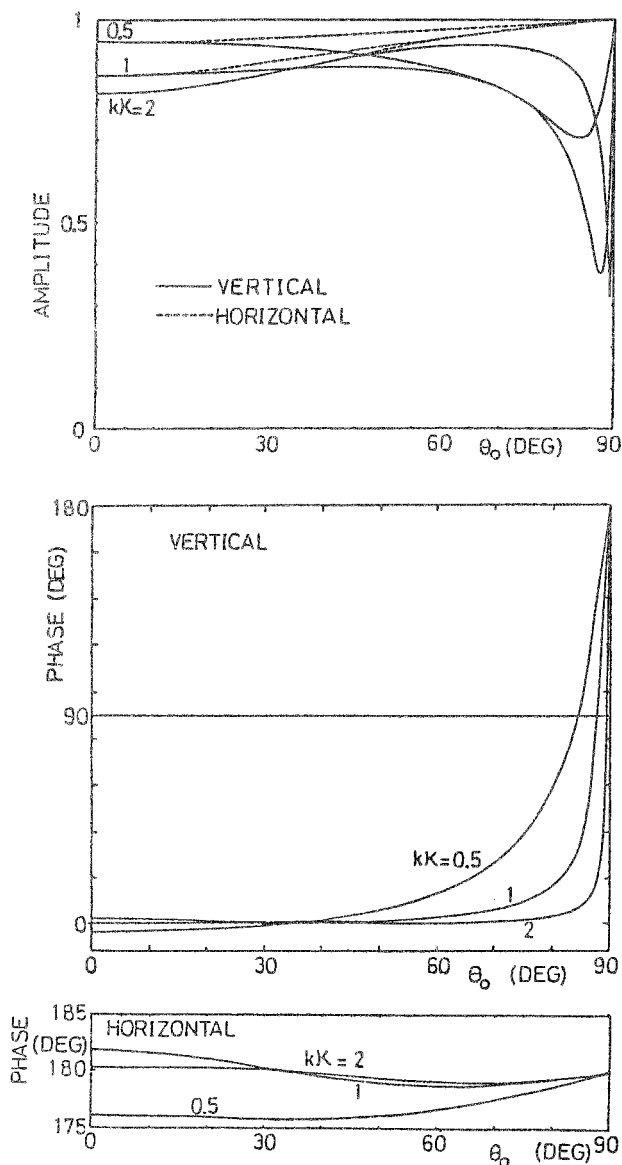


図 6. 4 コヒーレント反射係数（振幅と位相）

B. E_z の分散

遠方 ($z=\infty$) に於ける E_z の分散を評価しよう。(6.34)を(6.19)に代入すれば、近似評価式

$$\langle |E_z - \langle E_z \rangle|^2 \rangle \simeq \frac{|2+B_0|^2}{k^2} \int \frac{[K_0 k_0^2(\lambda) - k^2(K_0 + \lambda_x)]^2}{|k_z(\lambda) - k r'|^2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (6.49)$$

$(K_0 + \lambda)^2 < k^2$

が得られる。(6.48)のガウス形パワースペクトルを仮定して、右辺を数値積分した結果が図 6.5 である。

表面の粗さパラメーター

$k\sigma$ とともに、 E_z の分散が増加し、逆に $k\sigma$ が零となるときには、分散も零となることがわかる。垂直入射 ($\theta_0 = 0$) に対する結果は、前章の図 5.5 と全く一致する。図 5.5 との比較によれば、 θ_0 が 30° では、垂直偏波入射の場合に E_z の分散がやや大きく、 $\theta_0 = 60^\circ$ では逆に水平偏波入射に対する分散がやや大きいことがわかる。

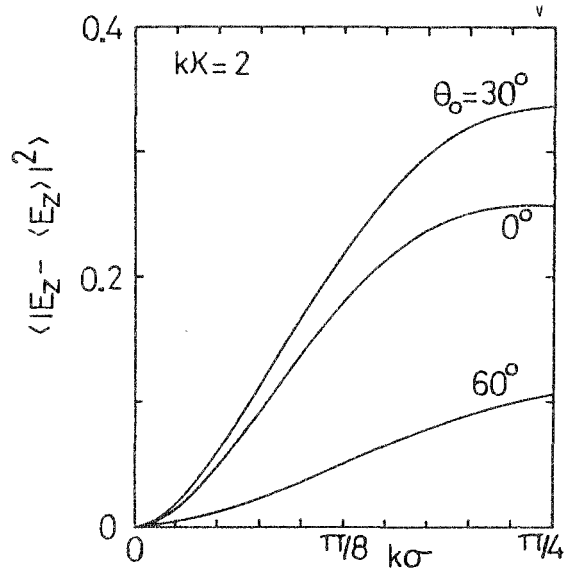


図 6.5 E_z の分散 (垂直偏波入射)

[θ_0 : 入射角, σ : 表面の粗さ]

C. 光学定理

散乱電界が(6.12)のように一様ベクトル確率場と指数関数の積に書けるから、複素ポインティングベクトル $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2$ は一様ベクトル確率場になる。この複素ポインティングベクトルの表面積分にエルゴード定理を適用すれば、前章 5.4 C 節と同様の計算により光学定理を導くことができる。すなわち、

$$\frac{K_z}{k} = \{ |1+B_0|^2 + |A_0|^2 \} \frac{K_z}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \cdots \int \frac{k_z(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}{(K_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^2 < k^2} \{ |A_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 + |B_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)|^2 \} d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \quad (6.50)$$

を得る。この右辺において、 A_0 を $(1+A_0)$ で、 $(1+B_0)$ を B_0 で置き換えた式が(5.67)である。この左辺は、単位面積に入射する電力であり、一方右辺第一項はコヒーレント反射波の電力である。但し、(6.32)により A_0 は零である。右辺の級数部は単位面積から散乱されるインコヒーレント散乱電力であり、以下では、(6.33)の $A_1(\lambda)$ と(6.34)の $B_1(\lambda)$ のみによって近似的に評価する。

図 6.6 は、光学定理を表面粗さ $k\sigma$ の関数と計算した結果である。垂直入射 ($\theta_0=0$) の場合には、前章の図 5.6 と全く同じになるので、 $\theta_0=20^\circ$ の場合を示した。図 5.6 と同様、 $k\sigma$ が増加すれば、コヒーレント反射 (曲線 a) が減少し、逆にインコヒーレント散乱 (曲線 b) が増加する。この結果、全散乱電力 (曲線 c) は入射電力 (直線 d) にほぼ一致するが、 $k\sigma \geq \pi/8$ では、入射電力と全散乱電力の差である電力誤差が大きくなり近似が劣化することがわかる。

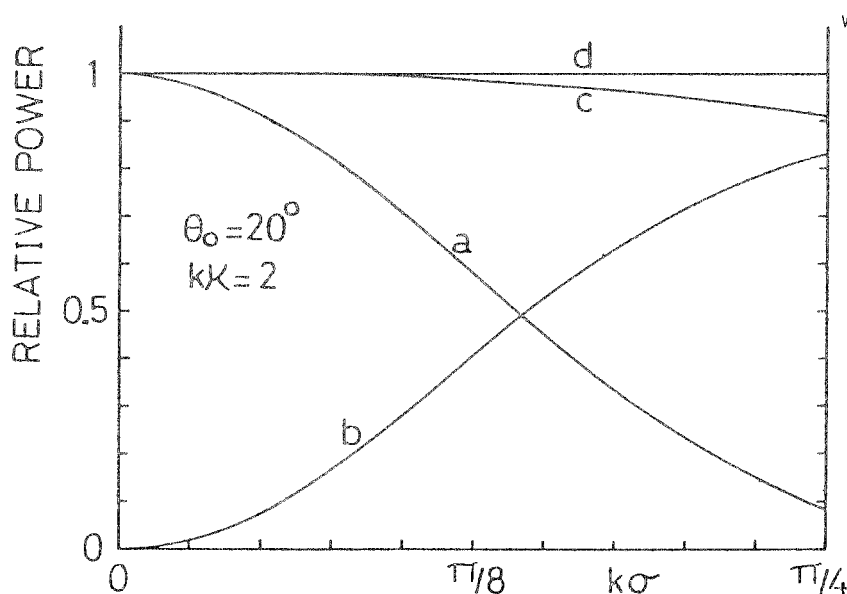


図 6.6 光学定理 (表面粗さ依存性)

a : コヒーレント反射電力, b : インコヒーレント散乱電力,
c : 全散乱電力 (a と b の和), d : 入射電力

図 6.7 は、電力の相対関係を入射角 θ_0 の関数として計算した結果である。この図は、垂直偏波入射に固有の興味ある特徴を示している。すなわち、コヒ

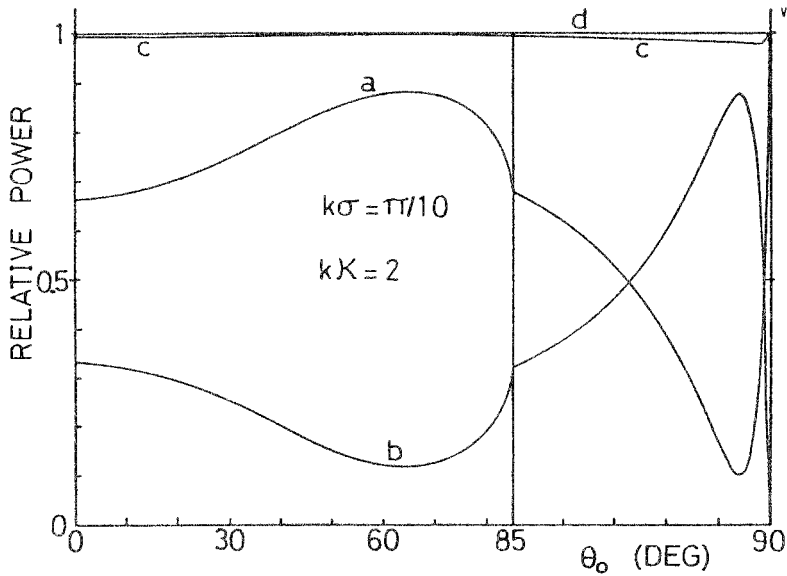


図 6.7 光学定理（入射角依存性）

a : コヒーレント反射電力, b : インコヒーレント散乱電力
c : 全散乱電力 (a と b の和), d : 入射電力

ーレント散乱電力とインコヒーレント散乱電力が入射角とともに急激に変動し、入射角 θ_0 が 90° に近いとき、コヒーレント散乱がほとんど消滅し、逆にインコヒーレント散乱が異常に大きくなる。しかし、 $\theta = \pi/2$ では、インコヒーレント散乱が消滅する。これは、 B_0 からのフィード・バックによるものである。不規則表面の相関距離が大きい $k\kappa = 2$ の図 6.7 の場合、この様なコヒーレント散乱とインコヒーレント散乱の急激な変動にもかかわらず、電力誤差は全ての入射角に対して 3% 以下である。しかし、電力誤差は、 $k\kappa$ が小さくなれば増加する。たとえば、 $k\kappa = 1.0$ (0.5) では、約 9% (11%) である。

以上のことより、表面の粗さと勾配がともに小さい $k\sigma \ll \pi$, $k\kappa \leq 2$ では、前節の近似解は十分よい近似を与えるものと推定できる。

D. インコヒーレント散乱の角度分布

インコヒーレント散乱の角度分布を $S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0)$ と書く。前章の (5.7.2) ~ (5.7.5) に、(6.3.3) (6.3.4) を代入して整理すれば、

$$S(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) = S_{VH}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0) + S_{VV}(\theta, \phi | \theta_0, \phi_0), \quad (6.51)$$

$$S_{VH}(\theta, \phi | \theta_0, 0) \simeq k^4 |2 + B_0|^2 \cos \theta \sin^2 \phi |F(A)|^2, \quad (6.52)$$

$$S_{VV}(\theta, \phi | \theta_0, 0) \simeq k^4 |2+B_0|^2 \cos \theta \frac{(\sin \theta \sin \theta_0 - \cos \phi)^2}{|\cos \theta - r'|^2} |F(A)|^2 \quad (6.53)$$

但し、

$$A = k \sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi} \quad (6.54)$$

となる。ここで、添字 VH は、垂直偏波入射－水平偏波散乱を表し、添字 VV は垂直偏波入射－垂直偏波散乱を意味する。 S_{VH} の ϕ 依存性より、水平偏波の散乱波は $\phi = \pm \pi/2$ の横方向 ($\pm y$ 方向) に強いが、前方および後方には生じないことがわかる。同様に、 S_{VV} の ϕ 依存性により、垂直偏波の散乱波は、横方向にはやや弱い。後

方には強いが、前方には零点をもつので、水平偏波入射の場合 (5.6 E 節) とはやや事情が異っている。

図 6.8 は、ガウス型スペクトル (6.48) を仮定して、インコヒーレント散乱の角度分布を計算したものである。

(6.53) の分母 $|\cos \theta - r'|^2$ のため、 $\theta \simeq \pi/2$ に鋭いピークが現われている。

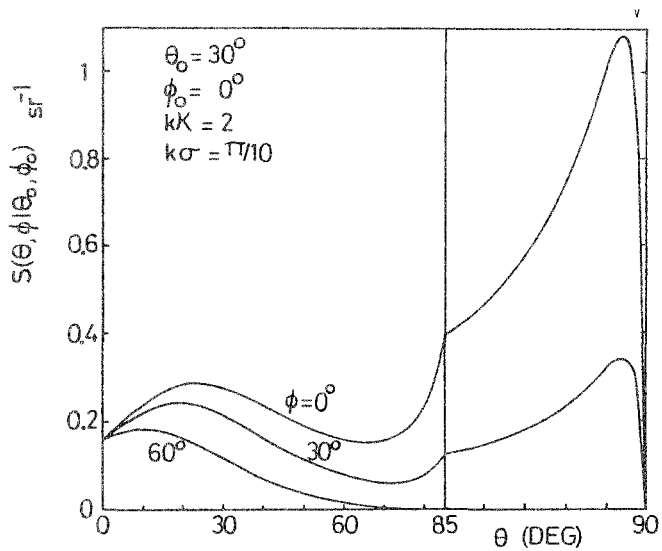


図 6.8 インコヒーレント散乱の角度分布

E. 単位面積あたりの後方散乱断面積

後方 ($\theta = \theta_0, \phi = \pi, \phi_0 = 0$) には、前節の近似解は交差偏波を生じさせない。垂直偏波入射－垂直偏波散乱の後方散乱断面積 $\sigma_{VV}^B(\theta)$ は、(6.53) と (5.75) により、

$$\begin{aligned} \sigma_{VV}^B(\theta) &= 4\pi \cos \theta S_{VV}(\theta, \pi | \theta, 0) \\ &\simeq 4\pi |2+B_0|^2 k^4 \cos^2 \theta \frac{(\sin^2 \theta + 1)^2 |F(2k \sin \theta)|^2}{|\cos \theta - r'|^2} \end{aligned} \quad (6.55)$$

となる。ここで、 $r' = B_0 = 0$ とおけば、1次摂動解による結果

$$\sigma_{VV}^B(\theta) \simeq 16\pi k^4 (\sin^2 \theta + 1)^2 |F(2k \sin \theta)|^2 \quad (6.56)$$

と一致する。

図 6.9 は本論文の結果 (6.55) と一次摂動解による結果 (6.56) とを比較するものである。 $\theta = \theta_0 \leq 60^\circ$ では、 B_0 が微小量であるため、本論文の結果は、摂動の結果に比べてわずかに小さい散乱断面積を与える。しかし、 $\theta = \theta_0 \geq 60^\circ$

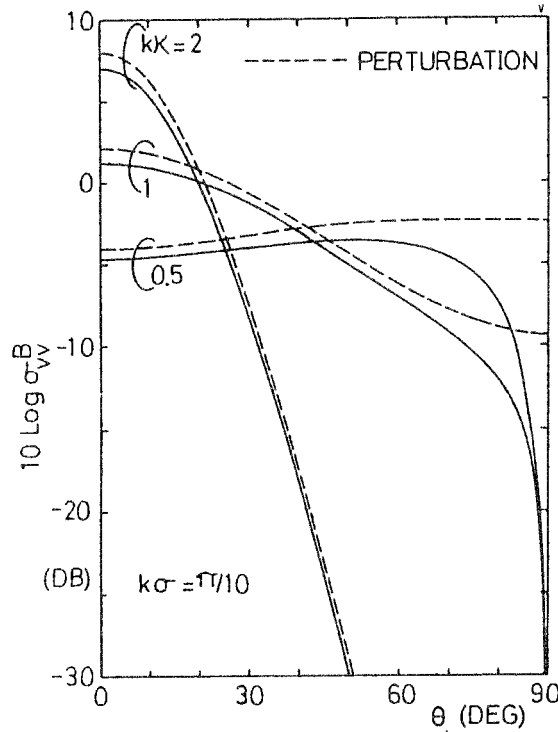


図 6.9 単位面積あたりの後方散乱断面積 (実線：本論文の結果，破線：1 次摂動解による結果)

では、両者は全く異なっており、(6.55) は、はるかに小さい散乱断面積を与える。これは、図 6.3 が示す様に、 B_0 が微小量ではないためである。 $\theta = \theta_0 = \pi/2$ のときには、摂動法では σ_{vv}^B が零とならないのに対し、我々の結果は、 $|2+B_0|^2$ と $\cos^2 \theta$ の二つの因子が零となるため、零となる。

F. 表面波の平均電力流

A_1 と B_1 のみを用いる近似では、表面波の x 方向への平均電力流 P_s は (5.82) により、

$$P_s \simeq \frac{1}{2k} \int_{(K_0+\lambda)^2 > k^2} \frac{(K_0+\lambda_x)}{\sqrt{(K_0+\lambda)^2 - k^2}} \{ |A_1(\lambda)|^2 + |B_1(\lambda)|^2 \} d\lambda \quad (6.57)$$

と書ける。これに，(6.33) (6.34) を代入して，整理すれば，

$$P_s \simeq \frac{|2+B_0|^2}{2k} \int_{(K_0+\lambda)^2 > k^2} \frac{(K_0+\lambda_x)}{\sqrt{(K_0+\lambda)^2 - k^2}} \frac{|F(\lambda)|^2}{k_0^2(\lambda)} \left[k^2 \lambda_y^2 + \frac{[K_0 k_0^2(\lambda) - k^2(K_0+\lambda_x)]^2}{|k_z(\lambda) - k r'|^2} \right] d\lambda, \quad (6.58)$$

となる。図 6.10 は，この右辺を数値積分により求めたものである。図より， $k\kappa \leq 1$ では，表面波の電力は $-x$ 方向に流れ， $k\kappa = 2$ では x 方向に流れることがわかる。これは，第三章のノイマン条件の場合（図 3.10）と類似の結果である。

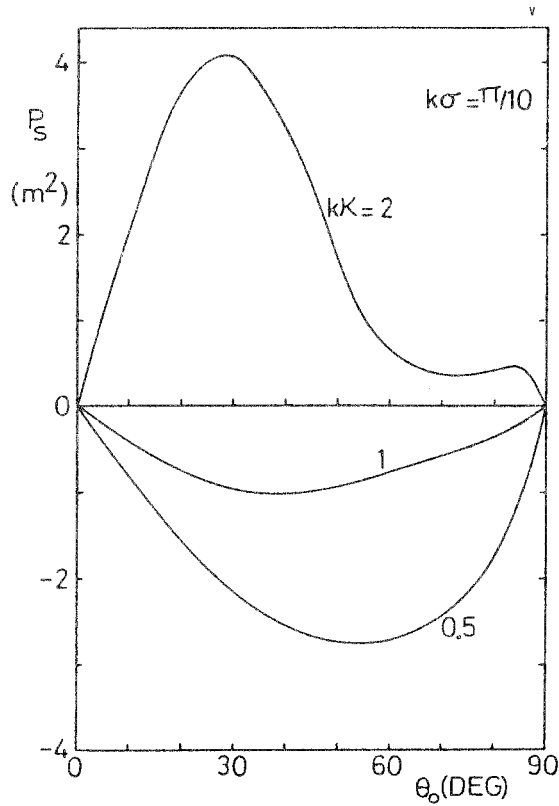


図 6.10 表面波の平均電力流 (θ_0 : 入射角, κ : 相関距離)

6.5 補 足

A. 摂動法によるコヒーレント散乱振幅

2 次の摂動を含むコヒーレント散乱振幅は、水平偏波入射の場合、

$$-(1+A_0) \cong -1 + 2K_z \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{\lambda_y^2}{k_z(\lambda)} + k_z(\lambda) \right\} d\lambda, \quad (5.117) \quad \text{再掲}$$

で与えられ、全ての入射角 θ_0 に対して発散することがない。しかし、垂直偏波入射の場合、

$$(1+B_0) \cong 1 - \frac{2}{K_z} \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{k^2 \lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + K_z^2 k_z(\lambda) \right\} d\lambda, \quad (6.40 \text{再掲})$$

となり、 $K_z = k \cos \theta_0 = 0$ のとき発散する。そこで、Rice は、相関距離 κ が無限大で、パワースペクトルが原点 ($\lambda = 0$) に集中している場合、すなわち、

$$|F(\lambda)|^2 = \sigma^2 \delta(\lambda) \quad (6.59)$$

の場合を考えた。このパワースペクトルは、見本表面に凹凸がなく、平坦な平面がガウス分布に従って上下していることに対応するので、物理的意味は少ない。この特別の場合には、右辺の積分は容易に実行できて、

$$\left. \begin{aligned} -(1+A_0) &\cong -(1-2\sigma^2 K_z^2) = -(1-2k^2 \sigma^2 \cos^2 \theta_0) \\ (1+B_0) &\cong 1-2\sigma^2 K_z^2 = 1-2k^2 \sigma^2 \cos^2 \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

となり、符号を除いて入射偏波依存性がない。(6.60)は、effective reflection coefficient とよばれることがある。⁽¹⁰⁰⁾ これは、摂動法における発散の困難をさける手法として導入されたものであるが、興味深いのは、キルヒホッフ近似によるコヒーレント反射係数(1.10)との関係である。

(1.10)を展開すれば、

$$\rho = \exp \{ -2k^2 \sigma^2 \cos^2 \theta_0 \} = 1 - 2k^2 \sigma^2 \cos^2 \theta_0 + \dots \quad (6.61)$$

となり、(6.60)はこの展開の最初の2項と一致している。

B. 表面波モード

6.4節では、第3章の結果と類似した異常散乱が生ずることを明らかにした。これは、不規則表面上を伝搬する表面波モードの存在を示唆するものである。

3.5節の議論によれば、表面波モードの存在条件は、コヒーレント反射振幅 $(1+B_0)$ が発散する条件に等しいから、(6.38)(6.37)により、

$$K_z = - \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{k^2 \lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + K_z^2 k_z(\lambda) \right\} d\lambda, \quad (6.62)$$

$$B_0 = \infty$$

となる。入射波が存在するとき，コヒーレント反射波が消える条件が，表面波モードの存在条件であるとも解釈できる。このときには，(6.62) 右辺の負の符号が消えて，

$$K_z = \int_{R^2} |F(\lambda)|^2 \left\{ \frac{k^2 \lambda_x^2}{k_z(\lambda)} + K_z^2 k_z(\lambda) \right\} d\lambda, \quad (6.63)$$

$$B_0 = -1$$

が条件となる。(6.63) の積分は σ^2 オーダーの微小量であるから， $K_z \simeq 0$ のときコヒーレント反射振幅が消えることになる。これが，図 6.7 において，コヒーレント反射電力が $\theta_0 \simeq 90^\circ$ にて最小となる原因である。

(6.62) 右辺の積分を $K_0 = k e_x$ ， $K_z = 0$ と仮定して近似的に評価すれば， $(-k r')$ に等しいので，(6.62) は，

$$K_z - k r' = 0 \quad (6.64)$$

となる。ここで r' は (5.102) で定義した定数である。垂直偏波成分の係数 $B_1(\lambda)$ の極は，水平偏波入射の (5.111)，垂直偏波入射の (6.34) に共通して，

$$k_z(\lambda) - k r' = 0 \quad (6.65)$$

の根である。これは，(6.64) と物理的には同じ条件で，ともに Rayleigh 波数の近傍に表面波モードの極ができることを表す。この極のため，Rayleigh 波数近傍で垂直偏波成分の振幅が大きくなり，図 5.7 や図 6.8 で見たように，インコヒーレント散乱の角度分布に鋭いピークが現われると解釈できる。

第七章 結 論

不規則表面による波動散乱を波動方程式のランダム境界値問題として取扱い、統計的散乱特性についての理論解析を行った。それらの研究方法と成果は以下のように要約される。

第2章においては、確率過程の理論を背景とする新しい解析法を導入して、スカラー平面波の1次元不規則表面（ディリクレ条件）による散乱を論じた。まず、強義の一樣確率場（強定常確率過程）で記述される無限の不規則表面に平面波が入射するとき、波動関数の形は指数関数と未知の一樣確率場との積となることを導いた。これは、回折格子の理論における Floquet の解に対応するもので、解析の出発点となるものである。この解の形から、コヒーレント反射波は平均値平面からの鏡面反射成分のみをもつことを明らかにすることができ、また、波動関数を求めることは、未知の一樣確率場を求めることに帰着することになった。次に、未知の一樣確率場を具体的に解くため、ガウス過程の不規則表面を仮定し、ウィナー展開を用いた。表面粗さが微小である場合に成立する実効境界条件を自乗（確率）平均の意味で満たすことより、ウィナー展開の展開係数（関数）に関する連立方程式を導き、これを近似的に解いて波動関数を求めた。このように求めた近似波動関数は、従来の理論による波動関数を拡張したものであり、また、確率過程として表現されているので、任意の統計的散乱特性が平均操作により得られる利点があった。コヒーレント散乱振幅やインコヒーレント散乱の角度分布、表面波の平均電力流などの統計量を定式化し、数値計算例を求めた。また、エルゴード定理を用いて光学定理を導出することができた。これは、従来の理論では得られないものであり、確率過程の理論を用いる解析法により始めて得られたものである。表面の粗さが波長に比べて十分小であれば、近似波動関数が光学定理をほぼ満たすことを数値計算により確かめた。

このような理論の定式化は、第3章以後の解析の基礎となるものである。本論文の特徴は、ウィナー展開を用いて波動関数を表現し、計算することにある。ウィナー展開を用いる利点・欠点は以下の諸点にある。

- 1) 波動関数が確率過程として表現できる。
- 2) 解くべき展開係数はランダムでない通常の関数であるので、計算は容易である。

- 3) ウィナーエルミット微分式の直交性と漸化式が既知であるので、計算を系統的に進めることができる。
- 4) 代数的な計算により、多重散乱を含む解が得られる。
- 5) ウィナー展開は統計的直交性（無相関であること）をもとにした展開であるので、多重散乱のメカニズムは見にくい。
- 6) 摂動法では展開の各オーダーごとに光学定理をみたすが、ウィナー展開による解は光学定理を満たすとは限らない。

第3章は、第2章の解析方法をノイマン条件から導かれる近似境界条件へ適用したものである。この問題は、従来の理論では水平方向への散乱波（Rayleigh波数をもつ散乱波）の振幅が発散するため、未解決であった。しかし、ウィナー展開を用いれば、高次の展開係数からの補正を容易に取り入れることができるので、発散しない波動関数を求めることができた。この波動関数を用いて、コヒーレント散乱振幅と光学定理、波動関数の分散、インコヒーレント散乱の角度分布、散乱断面積、表面波の平均電力流を計算した。その結果、以下の事が新しくわかった。

- 7) 波動関数の分散は、表面粗さが十分小であるとき、粗さの自乗に比例する。
- 8) 表面粗さが零に近づくとき、波動関数は平坦面上の波動関数に収束する。
しかし、この収束は自乗平均の意味にすぎず、インコヒーレント散乱の展開係数自身は零に一様収束しない。
- 9) 水平方向へのインコヒーレント散乱が異常に大となる。
- 10) 入射角が大きく、水平入射に近いとき、コヒーレント散乱がほとんど消滅し、インコヒーレント散乱が支配的となる。
- 11) 1次摂動解で求めた後方散乱断面積の値は、入射角が小であるときには正しい値に近い。しかし、入射角が大きく水平入射に近いときには正しくない。

以上の9) 10) は、回折格子における Wood's anomaly と類似点があるので、異常散乱とよび、その原因は表面波モードの存在に関係することを示唆した。また、表面波モード自身を求める試みを行ったが、この部分は未完成である。

第4章は、第2章の解析方法を2次元不規則表面の場合に拡張したものである。一様確率場で記述される不規則表面にスカラー平面波が入射するとき、波動関数の形は指数関数と一様確率場の積になることを導いた。ウィナー展開を用いて求めた近似波動関数は、従来の理論によるものと一致した。コヒーレン

ト散乱振幅とインコヒーレント散乱の角度分布，光学定理，表面波の平均電力流の計算例を得た。この章の波動関数は光学定理を満たすので，近似の精度を見るため境界条件に関する自乗平均誤差を計算した。その結果，不規則表面の粗さが波長に比べて十分小であれば，誤差も小であることが確かめられた。

次に，完全導体の不規則表面による平面電磁波の散乱を取り上げ，第5章では水平偏波入射の場合を，第6章では垂直偏波入射の場合を解析した。第3章の場合と同様，従来の摂動法では，Rayleigh波数をもつ部分波の振幅が発散するため散乱断面積以外の統計的散乱特性を求めることができなかった。

しかし，摂動展開ではなくウィナー展開を用いたので，発散しない解を求めることができ，種々の散乱特性を具体的に計算することができた。その結果，水平・垂直の両偏波入射に共通して，電界の分散は表面粗さの自乗に比例すること，インコヒーレント散乱の垂直偏波成分は，水平方向に鋭いピークをもつことが新しくわかった。垂直偏波入射の場合，入射角が大きく水平入射に近いとき，コヒーレント散乱がほとんど消え，インコヒーレント散乱が支配的となることがわかった。

以上のように，不規則表面による波動散乱の新しい定式化を行い，従来の理論では解決できない波動関数の発散の問題に具体的に解答を与えたことに本論文の意義があり，散乱理論の発展に寄与するものである。

最後に，本論文で用いた仮定を要約し，理論の拡張並びに今後の課題について私見を述べたい。本論文で用いた仮定は以下の4点にほぼ要約される。

- a) 平面波の散乱
- b) 完全導体の不規則表面
- c) 厳密な境界条件を用いず，不規則表面の局所的勾配がゆるやかで，かつ，表面粗さが波長に比べて十分小さいとの仮定の下で，近似境界条件を用いたこと。
- d) 散乱特性を具体的，数値的に計算するため，不規則表面のパワースペクトルとして，有理型（第2章），ガウス型（第3章），等方のガウス型（第4，5，6章）を仮定したこと。

理論を球面波・ビーム波の散乱の場合に拡張することは，実験との比較もあるので重要である。この拡張は，(2.25)式の積分を実行することにより，容易に行える。種々のパワースペクトルをもつ誘電体不規則表面による散乱を解析することは，リモートセンシングへの応用もあるので重要であろう。本論文

の方法を誘電体不規則表面の場合へ適用することは容易である。しかし、c) の仮定をとらず、表面粗さが波長と同程度の場合を解析することは、原理的には可能であるが、ウィナー展開の計算が煩雑になるので、実際には困難である。このため、ウィナー展開の計算において、近似方法を新しく考案する必要があると思われる。また、3.5 節で述べた表面波モードを合理的に定義し、その存在形態を明確にすることは、理論的に興味がある。表面波モードの存在形態を明確に出来れば、不規則表面による波動散乱理論を体系的にまとめることができる可能性がある。さらに、ランダム系のリーキ波の問題を考える手がかりともなりうることを指摘したい。

これらの問題は、今後の研究課題としたいと考えている。

〔本論文脱稿後、第三章の異常散乱と表面波モードについて更に検討した(104)–(106)。その結果、伝送線等価回路を導入すれば異常散乱を物理的に見やすい形で表現できることが判明している。〕

謝 辞

本研究は小倉久直教授の御指導の下に行ったものである。問題を提起されるときともに、終始適切な御指導を下された同教授に厚く御礼申し上げます。

また、日ごろ御鞭撻を下されるとともに、論文をまとめるにあたって御指導御助言をいただいた池上淳一教授に心から感謝します。論文の内見をしていただいた木村磐根教授ならびに中島将光助教授に御礼申し上げます。

さらに、日ごろお世話になっている吉田靖夫助教授ならびに池上（淳）研究室の各位に御礼申し上げます。在学中に研究に協力していただいた松本文平，坂田稔，青木正憲の諸氏に感謝します。

付 録 A. ウィナー展開について

A 1. ま え が き

工学・物理学におけるランダム現象の解析法には、二つの考え方がある。第一の考え方は、ランダムな物理量を直接解析するのではなく、平均値・分散・スペクトル・相関々数・確率分布などの統計量が従う方程式を導き、これを解くものである。これは、統計力学におけるボルツマン方程式をはじめ、ランダム媒質中の波動伝搬における多くの理論の背景となっている。たとえば、ダイヤグラム法では、波動場の平均値と強度が満たす二つの方程式⁽⁹⁴⁾ (Dyson 方程式と Bathe-Salpeter 方程式)を導き、モーメント方程式の方法では波動関数の統計モーメントが満たす方程式を各次数のモーメントごとに導き、輸送方程式では波動の平均強度が満たす時空間運動方程式を導いている⁽⁹⁰⁾。これらの統計量は、ランダムではない通常関数であるので、応用数学の種々の解法を利用できる利点がある。しかし、得られる結果は、すでに平均されたマクロな統計量であるので、結果の物理的意味が見にくいばかりではなく、統計と無関係に個別に成立するエネルギー保存則も統計的諸量の関係として記述されるにすぎない等の欠点がある。

第二の考え方は、ランダムな物理量そのものをランダム関数として解析するものであり、雑音・信号などの確率過程の予測・戸波などの線形理論でしばしば用いられる方法である⁽¹⁹⁾。この方法の利点を列挙すれば、ランダム関数としての入力-出力関係（原因-結果の関係）が記述されるので、物理的意味が見やすい、必要な統計量は平均操作によって得られる、個別に成立する性質と統計的（平均的）に成立する性質とを分離することができ、逆にこれらをエルゴード定理により結びつけることもできる、解くべき方程式は唯一である、などである。しかし、この考えを非線形の問題に適用するには、ランダム関数の非線形理論が必要である。

この様な数学的問題は、基本的な確率過程としてのブラウン運動とその非線形汎関数の理論により、N.Wienerにより解決された⁽¹⁷⁾。Wienerの考えを紹介するため、簡単な例を考えよう。ある非線形回路にサンプル化した定常・独立の確率系列（図 A 1 参照）

$$I_n = X(nT), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad T: \text{周期} \quad (\text{A } 1)$$

が入力されるとき、出力 O_n は、入力系列の関数となる。つまり、

$$O_n = f(I_n, I_{n-1}, I_{n-2}, \dots) \quad (\text{A } 2)$$

(もし、回路に記憶がなければ、 O_n は現在の入力 I_n のみの関数である。)

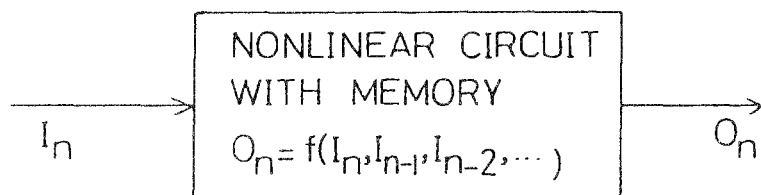


図 A.1. 非線回路の応答 (入力 I_n , 出力 O_n)

無限個の変数の関数 (A2) を以下では汎函数とよぶ。入力 I_n がガウス分布に従う場合には、 f をエルミット多項式で展開すれば、展開の各項はガウス分布を重みとする積分 (平均) により互いに直交する。つまり、各項が無相関となる。これを非線形確率汎函数 f の直交展開 (ウィナー展開) という。同様の展開は、時間的に連続した白色雑音入力に対しても可能である。Wiener 自身は、入力としてブラウン運動 $B(t)$ —ガウス白色雑音を時間 $(0, t)$ で積分したもの—を考えた。 $B(t)$ の任意の非線形汎函数は、多項式汎函数

$$\int \cdots \int K_n(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (A3)$$

の線形結合で近似できることに注目し、(A3) の多項式汎函数全体をシュミットの方法で直交化することによりエルミット多項式に類似した直交展開の基底を作った。

伊藤⁽⁸⁹⁾ は、Wiener の理論を Wiener 積分の名の下で数学的に整理した。ブラウン運動に代って、ガウスランダム測度を導入することにより多次元確率場の表現を与えるとともに、エルゴード性などを論じている。

Wiener の理論は、工学・物理学における不規則現象の解析にしばしば用いられる。その例としては、Wiener による非線形回路のパラメータ推定、脳波のスペクトル・FM変調のスペクトルの解析⁽¹⁷⁾、Barrett による非線形システムの白色雑音に対する応答の計算⁽⁹⁸⁾⁽⁹⁹⁾、今村等による乱流理論⁽¹⁸⁾への適用などがある。また、小倉・中山等は、ランダム媒質中の波動伝搬理論へ応用している^{(82)–(87)}。

A 2. エルミット多項式による展開 (準備)⁽¹⁰¹⁾

よく知られている様に、条件

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \exp(-x^2/2) dx < \infty \quad (\text{A4})$$

を満たす関数 $f(x)$ は、エルミット多項式 $\{H_n(x)\}$ によりフーリエ展開できる。
すなわち、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n(x) \quad (\text{A5})$$

ここで、 x を平均値が零で分散が 1 のガウス確率密度関数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (\text{A6})$$

に従うガウスランダム変数であると解釈する。このとき、条件 (A4) は、ランダム変数 $f(x)$ の自乗平均値が有界

$$\langle |f(x)|^2 \rangle < \infty$$

であることを表し、一方、展開式 (A5) は、ランダム変数 $f(x)$ がランダム変数 $\{H_n(x)\}$ の和で記述できることを表している。但し、記号 $\langle \rangle$ は平均を表すものとする。エルミット多項式を〔文献⁽¹⁰²⁾の 93 頁参照〕

$$H_0 = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, \dots \quad (\text{A7})$$

$$H_1(x) H_n(x) = H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x) \quad (\text{A8})$$

で定義すれば、二つのランダム変数 $H_n(x)$ と $H_m(x)$ は無相関である。

$$\langle H_n(x) H_m(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \delta_{nm} \quad (\text{A9})$$

ここで、 δ_{nm} はクロネッカーのデルタである。従って、(A5) の両辺に $H_n(x)$ を乗じて平均すれば、

$$\langle f(x) H_n(x) \rangle = n! f_n \quad (\text{A10})$$

となり、展開係数 f_n は相関 $\langle f(x) H_n(x) \rangle$ により求められる。 $n = 0$ とおけば、(A10) より、

$$f_0 = \langle f(x) \rangle$$

となるので、展開 (A5) の初項は平均値に等しい。また $f(x)$ の自乗平均値は、直交性 (A9) により、

$$\langle |f(x)|^2 \rangle = |f_0|^2 + 1! |f_1|^2 + 2! |f_2|^2 + \dots \quad (\text{A11})$$

となる。これは、パルセバルの定理である。

n 変数の関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のエルミット多項式による展開において、

x_1, x_2, \dots, x_n が ガウス変数とすれば、同様の直交展開（無相関展開）が得られる。ただし、通常の関数では変数 x_1, \dots, x_n は独立変数であるが、これらをガウスランダム変数と見ると変数相互に相関がある場合もあるので注意が必要である。ガウス変数 x_n は相互に統計的独立であると考え、この様なエルミット展開は無限個の変数をもつ関数（汎函数）に直ちに拡張できる。無限変数の場合を考えるために、先ず二、三の概念を準備しよう。

A 3. エルミット多項式の積による汎函数展開

ランダム変数の系列

$$\dots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \dots \quad (A12)$$

を確率系列という。個々の系列に目印 ω をつけ $\{X_n(\omega), n=0, \pm 1, \dots\}$ の様に書き、 ω を見本点、 ω 全体からなる集合に空集合を付け加えた集合を見本空間と呼び Ω で表わす。見本点 ω を固定したとき $\{X_n(\omega)\}$ は一つの系列（見本系列）である。逆に n を固定したとき $X_n(\omega)$ は ω の関数、すなわちランダム変数である。 ω は物理的には種々に解釈される。たとえば、 ω を実験、系列 $\{X_n(\omega)\}$ を実験結果と解釈できる。 ω を偶然を表す隠れたパラメータ、系列 $\{X_n(\omega)\}$ を偶然 ω による結果とも考えることもできる。しかし、以下では、 ω を系列 $\{X_n(\omega)\}$ 自身と見なすことにしよう。（この様な見本空間 Ω は関数空間形とよばれる。）⁽¹⁰³⁾

X_n を無限次元ベクトル ω の第 n に座標成分 ω_n

$$\omega_n = X_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (A13)$$

$$\omega = (\dots, X_n, X_{n+1}, \dots)$$

と考えると、 ω 全体からなる見本空間 Ω は可算無限次元のコークリッド空間 R^∞ （ R で直線 $(-\infty, \infty)$ を表す）である。系列 (A12) がランダムに変動するとき、ベクトル ω は方向と長さがランダムに変化することになる。ランダムベクトル ω の取る確率 $p(\omega)$ を定義するには、先ず n 次元区間

$$a_1 < X_{j_1} \leq b_1, \dots, a_n < X_{j_n} \leq b_n \quad (A14)$$

に ω ベクトルがある n 次元確率

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} p(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_n}) dX_{j_1} dX_{j_2} \dots dX_{j_n} \quad (A15)$$

を定義する。(A14) におけるあらゆるサンプル点 (j_1, j_2, \dots, j_n) 、サンプル数 n に対して有限次元確率 (A15) を定めれば、ある条件の下で無限次元の

確率 $p(\omega)$ が一意的に存在することが証明される (コルモゴロフの定理)。以下では、無限次元の確率 $p(\omega)$ に関する平均を記号 $\langle \rangle$ で表す。

任意のサンプル数 n 、任意のサンプル点 $\{j_n\}$ に対して、確率分布が移動不変、つまり、

$$p(X_{j_1+m}, X_{j_2+m}, \dots, X_{j_n+m}) = p(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_n}) \quad (A16)$$

(m は任意の整数)

が成立するとき、確率系列 $\{X_n\}$ を強定常という。強定常系列に対しては、平均値は定数であり、相関関数は座標の差のみの関数である。

キャメロン・マーチンの定理

$\{X_n\}$ を平均値が零、分散が 1 の独立ガウス変数列であるとする。

$$\langle X_n \rangle = 0, \quad \langle X_n X_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (A17)$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

系列 $\{X_n\}$ の関数を、(A13) の記号を用いて

$$f(\omega) = f(\dots, X_0, X_1, \dots) \quad (A18)$$

と書くとき、ランダム変数 $f(\omega)$ が $L^2(\Omega)$ に属するならば、すなわち自乗平均値が有界

$$\langle |f(\omega)|^2 \rangle < \infty \quad (A19)$$

ならば、エルミット多項式の積により自乗平均の意味で展開できる。

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} f_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{n_1, n_2, \dots, n_k} H_{n_1}(X_{j_1}) \dots H_{n_k}(X_{j_k}) \quad (A20)$$

このようなエルミット展開は、キャメロン・マーチンの定理とよばれる。

A 4. 多変数のエルミット多項式による汎函数展開

(A20) の展開は、通常のエルミット多項式の積による展開であるため、完備性の証明が見やすく直観的に理解しやすいが、実際の計算には不便である。しかし、多変数のエルミット多項式を導入すれば、計算に便利で見通しの良い展開が得られる。以下では、先ず多変数のエルミット多項式 $\{H^{(n)}\}$ を定義しよう。

通常のエルミット多項式 $H_n(X)$ は、1 次独立で完備な関数系

$$1, X, X^2, X^3, \dots$$

をガウス分布を重みとして直交化すれば得られる。このアナロジーとして多変数のエルミット多項式を定義しよう。〔演算子による定義については、今村⁽¹⁸⁾

を，母関数による定義については小倉⁽¹⁹⁾を参照されたい。〕(A17)を満たす独立ガウス変数列 $\{X_n\}$ が作る多項式

$$1, \{X_j\}, \{X_i X_j\}, \{X_i X_j X_k\}, \dots \quad (A21)$$

$$(i, j, k, \dots = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

全体は， $L^2(\Omega)$ における完備な関数系である。そこで，(A21)を多変数ガウス分布を重みとして直交化することを考える。先ず，0次の多項式を

$$H^{(0)} = 1 \quad (A22)$$

とおく。次に $H^{(1)}(X_i) = X_i + a_i$ とおくと，これが(A22)と直交することにより

$$\langle H^{(0)} H^{(1)}(X_i) \rangle = \langle X_i \rangle + a_i = a_i = 0$$

従って，1次の多項式は以下のようになる。

$$H^{(1)}(X_i) = X_i \quad (A23)$$

二次以上の多項式を定義するためには，ガウス変数の積の平均値に関する次の公式が必要である〔文献⁽¹⁹⁾の30頁参照〕。

$$\begin{aligned} \langle X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n} \rangle &= 0 \quad ; \quad (n \text{ が奇数}) \\ &= \sum_{\text{all pair}} \prod_{(\ell, k)} C_{\ell k} \quad ; \quad (n \text{ が偶数}) \end{aligned} \quad (A24)$$

ここで，積 \prod は添字 (i_1, i_2, \dots, i_n) を $n/2$ 個の対 (ℓ, k) に分割したものであり，和は，この様な対分割の全ての組合せについてとる。(組合せの数は $(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ 個である。)また $C_{\ell k}$ は，相関

$$C_{\ell k} = \langle X_{\ell} X_k \rangle \quad (A25)$$

に等しい。(A24)の性質は， $\{X_n\}$ の平均値が零であれば個数 n に無関係に成立する。

2次の多項式に対しては， $H^{(2)}(X_i, X_j) = X_i X_j + a_i X_i + b_j X_j + C_{ij}$ とおき，これが $H^{(0)}$ と直交すること，すなわち

$$\langle H^{(2)}(X_i, X_j) \rangle = \delta_{ij} + C_{ij} = 0$$

より $C_{ij} = -\delta_{ij}$ を得る。また $H^{(1)}(X_k)$ との直交条件より，

$$\begin{aligned} \langle H^{(1)}(X_k) H^{(2)}(X_i, X_j) \rangle &= \langle X_i X_j X_k \rangle + a_i \langle X_k X_i \rangle + a_j \langle X_k X_j \rangle \\ &\quad - \delta_{ij} \langle X_k \rangle \\ &= a_i \delta_{ik} + a_j \delta_{kj} = 0 \end{aligned} \quad (A26)$$

ここで，(A24)を用いた。(A26)が全ての k に関して成立するので

$a_i = a_j = 0$ となり，結局

$$H^{(2)}(X_i, X_j) = X_i X_j - \delta_{ij} \quad (A27)$$

となる。直交条件を用いた同様の計算により

$$H^{(3)}(X_i, X_j, X_k) = X_i X_j X_k - X_i \delta_{jk} - X_j \delta_{ik} - X_k \delta_{ij} \quad (A28)$$

$$\begin{aligned} H^{(4)}(X_i, X_j, X_k, X_\ell) = & X_i X_j X_k X_\ell - X_i X_j \delta_{k\ell} - X_i X_k \delta_{j\ell} \\ & - X_i X_\ell \delta_{jk} - X_j X_\ell \delta_{ik} - X_k X_\ell \delta_{ij} \\ & + \delta_{ij} \delta_{k\ell} + \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (A29)$$

等が得られる。この様に定義した多変数エルミット多項式は以下の性質をもつ。

(直交性)

$$\langle H^{(n)}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}) H^{(m)}(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_m}) \rangle = \delta_{nm} \delta_{ij}^n \quad (A30)$$

ここで δ_{ij}^n は， $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ ， $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ から 1 ケずつ取り出した対 (j_ν, i_μ) に対して $\delta_{i_\mu j_\nu}$ を作り，この様な n 個の積をすべての組合せについて加えたものである。たとえば，

$$\delta_{ij}^2 = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \quad (A31)$$

一般に δ_{ij}^n は，このような $n!$ 個の項の和である。これは (A9) の拡張として理解できる。

(漸化式)

$$\begin{aligned} H^{(1)}(X_\ell) H^{(n)}(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ = H^{(n+1)}(X_1, X_2, \dots, X_n, X_\ell) + \sum_{i=1}^n H^{(n-1)}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \delta_{i\ell} \end{aligned} \quad (A32)$$

これは，エルミット多項式の漸化式 (A8) に類似の性質である。

(対称性) 多変数のエルミット多項式は，変数の入れ換えに関して不変である。たとえば，

$$H^{(2)}(X_i, X_j) = H^{(2)}(X_j, X_i) \quad (A33)$$

(因子分解) 多変数のエルミット多項式は，1 変数のエルミット多項式の積に因子分割する。たとえば，

$$\begin{aligned} H^{(3)}(X_1, X_2, X_3) &= H_3(X_1), \quad (X_1 = X_2 = X_3 \text{ のとき}) \\ &= H_1(X_1) H_2(X_2), \quad (X_1 \neq X_2 = X_3 \text{ のとき}) \\ &= H_1(X_1) H_1(X_2) H_1(X_3), \quad (X_1, X_2, X_3 \text{ が全て異なるとき}) \end{aligned} \quad (A34)$$

多変数エルミット多項式による汎函数展開

条件 (A19) を満たす汎函数 (A18) は，多変数エルミット多項式 $H^{(n)}$ を用

いて、次式の様に自乗平均の意味でウィナー展開（ウィナーエルミット展開）できる。

$$f(\omega) = f(\cdots, X_0, X_1, \cdots) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)} f_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{(n)} H^{(n)}(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_n}) \quad (A35)$$

ここで、 i に関する和は、 i_1, i_2, \cdots, i_n がそれぞれ $-\infty$ から ∞ の任意の整数値をとることを表す。

直交性(A30)を用いれば、0次と1次の係数は一意的に定まる。すなわち

$$\langle f(\omega) \rangle = f^{(0)} \\ \langle f(\omega) H^{(1)}(X_i) \rangle = f_i^{(1)} \quad (A36)$$

しかし、対称性(A33)のため、2次以上の係数は一意的には決まらない。

(A30)を用いれば、たとえば

$$\langle f(\omega) H^{(2)}(X_i, X_j) \rangle = f_{ij}^{(2)} + f_{ji}^{(2)} \quad (A36)$$

$$\langle f(\omega) H^{(3)}(X_i, X_j, X_k) \rangle = f_{ijk}^{(3)} + f_{ikj}^{(3)} + f_{jki}^{(3)} + f_{jik}^{(3)} + f_{kij}^{(3)} + f_{kji}^{(3)} \quad (A37)$$

であり、係数が対称化された形で定まるにすぎない。そこで、係数は添字に関して対称であると以下では仮定する。この仮定の下で、係数は一意的に定まり、

$$\langle f(\omega) H^{(n)}(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_n}) \rangle = n! f_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{(n)} \quad (A38)$$

となる。直交性(A30)を用いれば、

$$\langle |f(\omega)|^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} |f_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{(n)}|^2 \quad (A39)$$

となる。これはパルセバルの定理(A11)と同じ性質である。

移動により導かれる強定常系列

ガウス強定常系列 $\{X_n\}$ の m ステップの移動 $\{X_n\} \rightarrow \{X_{n+m}\}$ を(A13)の見方により Ω 空間内における ω ベクトルの移動と考える。これを

$$\omega = \{X_n\} \rightarrow \omega' = T^m \omega = \{X_{n+m}\} \quad (A40)$$

と書くと、 T^m は

$$T^0 = 1 \text{ (恒等式)}, T^n T^m = T^{n+m} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (A41)$$

を満たす加法群であり、保測変換とよばれる。このとき ω ベクトルの成分の意味で、

$$X_n(\omega) = X_0(T^n \omega) \quad (A42)$$

と書くことができる。 m ステップの移動(A40)により、汎函数 $f(\omega)$ は $f(T^m \omega)$

へ移動することになるが，これは (A 3 5) により

$$\begin{aligned} f(T^m \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} f_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} H^{(n)}(X_{i_1+m}, X_{i_2+m}, \dots, X_{i_n+m}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} f_{i_1-m, i_2-m, \dots, i_n-m}^{(n)} H^{(n)}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}) \end{aligned} \quad (A 4 3)$$

で表現される。移動 (A 4 0) により， $\{X_n\}$ の確率分布は不変であるから， $H^{(n)}$ の確率分布も移動不変であり，その和の $f(T^m \omega)$ の確率分布も m によらない。従って $f(T^m \omega)$ は，一つの強定常過程であることがわかる。これを保測変換により作られた強定常過程とよぶ。

複素ガウスランダム測度による表現

後に定義する複素ランダム測度 $dB(\lambda)$ と複素ウィナーエルミット多項式 $h^{(n)}[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)]$ を用いると，* (A 3 5) (A 4 3) はスペクトル領域での表現に書き換えることができる。

強定常系列 $\{X_n\}$ のスペクトル表現

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dB(\lambda, \omega) \quad (A 4 4)$$

に対応して，

$$f(\omega) = F_0 + \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\lambda) dB(\lambda) + \iint_{-\pi}^{\pi} F_2(\lambda_1, \lambda_2) h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots, \quad (A 4 5)$$

$$f(T^m \omega) = F_0 + \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\lambda) e^{i\lambda m} dB(\lambda) + \iint_{-\pi}^{\pi} F_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)m} h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] + \dots, \quad (A 4 6)$$

ここで，

$$F_0 = f_0$$

$$F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} e^{i(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_n i_n)} f_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \quad (A 4 7)$$

である。 $f(T^m \omega)$ の平均値と相関々数は，直交性 (A 1 1 3) により

$$\langle f(\omega) \rangle = \langle f(T^m \omega) \rangle = f_0 = F_0 \quad (A 4 8)$$

*) (A 1 0 5) ~ (A 1 1 4), (A 1 1 7) ~ (A 1 2 4) 参照

$$\langle f(T^m \omega) f^*(\omega) \rangle = |F_0|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |F_1(\lambda)|^2 e^{i\lambda m} d\lambda + 2! \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_2(\lambda_1, \lambda_2)|^2 e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)m} d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \quad (A49)$$

$$= |f_0|^2 + \sum_{i,m} f_{i-m}^{(1)} f_i^{(1)*} + 2! \sum_{i,j} f_{i-m,j-m}^{(2)} f_{ij}^{(2)*} + \dots, \quad (A50)$$

となる。

A 5. ガウスランダム測度とウィナー展開

上では、離散パラメータ n をもつ確率系列 $\{X_n(\omega)\}$ とその汎函数のウィナー展開を考えたが、以下ではそれらを連続パラメータをもつ場合に拡張する。先ず、連続パラメータをもつ確率過程の定義と記号法を説明する。次に、理想化された確率過程としてのガウス白色雑音、ガウスランダム測度を導入し、その汎函数のウィナー展開を述べる。複素ガウスランダム測度によるウィナー展開についても簡単に述べる。

連続パラメータ x をもつ確率変数の系を確率過程とよぶ。確率過程では、波形の集合を考えるから、図 A 2 の様に各波形に目印 ω を付けて、 $f(x, \omega)$ と書く。1つの ω に対して一つの関数 $f(x) = f(x, \omega)$ が対応することになる。この ω を見本点といい、 ω の全体により構成される集合を見本空間と呼び Ω で表す。 ω を固定したとき $f(x, \omega)$ は一つの関数であるので、これを見本関数という。逆に x を固定したとき $f(x, \omega)$ は一つの確率変数である。

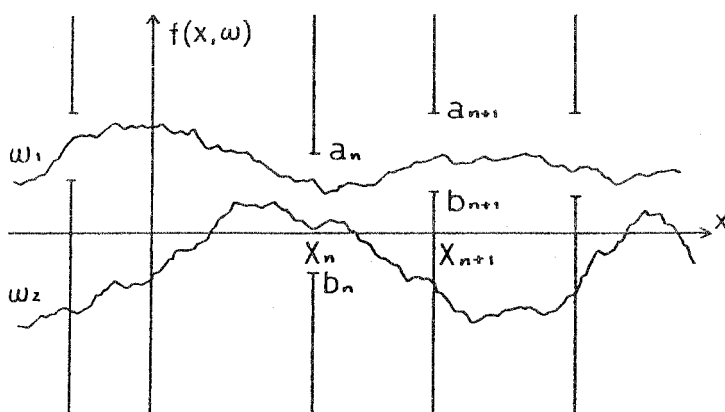


図 A.2 確率過程の定義

(A13) では確率系列を無限次元空間 $\Omega = R^\infty$ 内のベクトルと考えた。同様の考えにより、以下では ω を連続無限次元空間 R^R 内のベクトルと見なす。

見本空間 Ω を R^R と考え、 ω を Ω 内のベクトルで、その x 座標 ω_x が

$$\omega_x = f(x, \omega) \quad (A51)$$

$$\omega = \{f(x, \omega), -\infty \leq x \leq \infty\}$$

であるとする、波形 $\{f(x, \omega), -\infty \leq x \leq \infty\}$ と ω ベクトルとは 1 対 1 に対応する。このとき、図 A 2 に於ける n 個のゲート

$$\begin{aligned} (x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n), \\ b_i < f(x_i, \omega) \leq a_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (A52)$$

を通る確率

$$\int_{b_1}^{a_1} \cdots \int_{b_n}^{a_n} p(f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}) df_{x_1} \cdots df_{x_n} \quad (A53)$$

$$\text{但し, } f_{x_i} = f(x_i, \omega)$$

を考える。(A52) は、 Ω の部分集合としての ω ベクトルの集合を規定する。この集合を事象と考え、その確率が (A53) であると見なす。このとき、あらゆる有限個のサンプル点 (x_i) の取り方、あらゆるゲート (A52) の取り方に対する確率 (A53) が定義されれば、波形 ω に対する確率 $p(\omega)$ が一意的に存在することが証明される。この確率 $P(\omega)$ による平均を上と同様 $\langle \rangle$ で示す。

確率過程の移動

$$f(x, \omega) \rightarrow f(x+a, \omega), \quad -\infty < a < \infty \quad (A54)$$

に対して、(A52) のゲート

$$b_i < f(x_i+a, \omega) \leq a_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (A55)$$

を通る確率 (A53) が不変であるとき、すなわち

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{a_1} \cdots \int_{b_n}^{a_n} P(f_{x_1+a}, f_{x_2+a}, \cdots, f_{x_n+a}) df_{x_1+a} df_{x_2+a} \cdots df_{x_n+a} \\ = \int_{b_1}^{a_1} \cdots \int_{b_n}^{a_n} P(f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}) df_{x_1} \cdots df_{x_n} \end{aligned} \quad (A56)$$

であるとき、 $f(x, \omega)$ を強定常過程という。確率分布の移動不変性により強定常過程の平均値

$$\langle f(x, \omega) \rangle = M \quad (A57)$$

は定数であり、相関々数

$$\langle f(x+a, \omega) f(x, \omega) \rangle = C_f(|a|) \quad (\text{A58})$$

は、座標の差 $|a|$ のみの関数となる。

移動(A54)を(A51)により見本空間 Ω 内の移動 $\omega \rightarrow \omega'$ と見なして、

$$\omega' = T^a \omega \quad (\text{A59})$$

$$\omega'_x = (T^a \omega)_x = f(x+a, \omega)$$

と書くと、 T^a は、

$$T^0 = 1 \text{ (恒等式)}, T^a T^b = T^{a+b} \quad (-\infty \leq a, b \leq \infty)$$

を満たす加法群である。強定常過程 $f(x, \omega)$ に対して、 T^a は確率(測度)を(A56)の様に不変にするので、保測変換とよばれる。保測変換 T^a により、 ω ベクトルの成分(A51)の意味で、強定常過程は

$$f(x, \omega) = f(0, T^x \omega) \equiv f(T^x \omega) \quad (\text{A60})$$

と書くことができる。逆にこの右辺の形をもつ確率過程は、常に強定常過程となることが知られており⁽¹⁰³⁾、保測変換により生成された強定常過程とよばれる。

ガウスランダム測度

実のガウス過程 $W(x, \omega)$ 、 $(-\infty \leq x \leq \infty)$ が性質

$$\langle W(x, \omega) \rangle = 0, \quad \langle W(x_1, \omega) \cdot W(x_2, \omega) \rangle = \delta(x_1 - x_2) \quad (\text{A61})$$

〔右辺の δ はディラックのデルタ関数〕をもてば、ガウス白色雑音とよばれる。ガウス白色雑音は、力学における質点や電磁気学における点電荷と同様、理想化されたモデルとして重要である反面、明確に定義することは困難である。たとえば、固定した x に対して、ランダム変数 $W(x, \omega)$ の確率分布を定義することはできない。

この様な困難の解決策として、区間 d 上での積分

$$B(d, \omega) = \int_d W(x, \omega) dx \quad (\text{A62})$$

を導入する。 x に関する積分と平均とが可換であると見なす形式的な計算をすれば、(A61)により $B(d, \omega)$ は性質

- I. (零平均値) $\langle B(d, \omega) \rangle = 0$
- II. (長さに等しい分散) $\langle B^2(d, \omega) \rangle = |d| \quad (\text{A63})$
- III. (異なる区間では独立) $\langle B(d_1, \omega) B(d_2, \omega) \rangle = 0$ (区間 d_1 と d_2 が重ならないとき)

をもつことがわかる。さらに、共通部分をもたない区間 d_n ($n=0, 1, \dots$)の可算和に対して

$$\text{IV. (完全加法性)} \quad B\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n, \omega\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B(d_n, \omega) \quad (\text{A64})$$

が成立する。(A64)は、ルベーク測度のもつ完全加法性と類似しているので、 $B(d, \omega)$ はガウスランダム測度とよばれる。

微小区間 $d = (x + dx, x)$ に対して

$$B(dx, \omega) = dB(x, \omega) \equiv dB(x) \quad (\text{A65})$$

と ω を落として書くことにすれば、ガウスランダム測度の微分 $dB(x)$ は性質

$$\langle dB(x) \rangle = 0, \quad \langle dB(x_1) dB(x_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A66})$$

をもつガウス確率過程である。但し、 $\delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2$ は、 $x_1 = x_2$ のとき長さ dx_2 を表し、 $x_1 \neq x_2$ のとき零を表すものとする。

ウィナーエルミット微分式 (Wiener-Hermite differentials)

ガウスランダム測度の微分 $dB(x)$ は、性質 (A66) をもつ強定常過程であるから、(A51)と同様にこれを見本空間 Ω 内のベクトルと見なして

$$\omega = \{dB(x), -\infty \leq x \leq \infty\} \quad (\text{A67})$$

と書き、 $dB(x)$ の汎函数を ω の関数とみなして

$$\phi(\omega) = \phi[dB(x), -\infty \leq x \leq \infty] \quad (\text{A68})$$

と書く。ただし、この右辺は、連続無限個の変数 $[dB(x), -\infty \leq x \leq \infty]$ の関数を表すものと理解する。この節の目的は、 $\phi(\omega)$ の直交展開を論じることであるが、その準備として、展開の直交基底としてのウィナーエルミット微分式を定義する。

各 x ごとに独立なガウス変数 $dB(x)$ の関数 $\phi(\omega)$ は、 $dB(x)$ のあらゆる多項式全体

$$1, \quad \{dB(x_1)\}, \{dB(x_1)dB(x_2)\}, \{dB(x_1)dB(x_2)dB(x_3)\}, \dots \quad (\text{A69})$$

により $L^2(\Omega)$ の意味で展開できるから、(A69)を直交化することによりウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}$ を定義する。(A22) ~ (A29)を導いたのと全く同じ方法により、

$$h^{(0)} = 1 \quad (\text{A70})$$

$$h^{(1)}[dB(x)] = dB(x) \quad (\text{A71})$$

$$h^{(2)}[dB(x_1), dB(x_2)] = dB(x_1)dB(x_2) - \delta(x_1 - x_2)dx_1 dx_2 \quad (\text{A72})$$

$$\begin{aligned}
h^{(3)}[dB(x_1), dB(x_2), dB(x_3)] &= dB(x_1)dB(x_2)dB(x_3) \\
&\quad - dB(x_1)\delta(x_2-x_3)dx_2dx_3 \\
&\quad - dB(x_2)\delta(x_1-x_3)dx_1dx_3 \\
&\quad - dB(x_3)\delta(x_1-x_2)dx_1dx_2 \quad (A73)
\end{aligned}$$

等々が得られる。これらは、多変数のエルミット多項式 $H^{(n)}$ において、置換え

$$X_i \rightarrow dB(x_i), \quad \delta_{ij} \rightarrow \delta(x_i - x_j) dx_i dx_j \quad (A74)$$

をしたものである。

(漸化式)

$$\begin{aligned}
&h^{(1)}[dB(x_1)] h^{(n)}[dB(x_2), dB(x_3), \dots, dB(x_{n+1})] \\
&= h^{(n+1)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_{n+1})] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n+1} h^{(n-1)}[dB(x_2), \dots, dB(x_{i-1}), dB(x_{i+1}), \dots, dB(x_{n+1})] \\
&\quad \times \delta(x_1 - x_i) dx_1 dx_i \quad (A75)
\end{aligned}$$

(直交性)

$$\begin{aligned}
&\langle h^{(n)}[dB(x_{i_1}), dB(x_{i_2}), \dots, dB(x_{i_n})] \\
&\quad \times h^{(m)}[dB(x_{j_1}), dB(x_{j_2}), \dots, dB(x_{j_m})] \rangle \\
&= \delta_{nm} \delta^n(i-j) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n} dx_{j_1} \dots dx_{j_m} \quad (A76)
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta^n(i-j)$ は、(A30) の δ_{ij}^n において $\delta_{i\mu j\nu}$ を $\delta(x_{i\mu} - x_{j\nu})$ に置換えたものである。たとえば、

$$\delta^2(i-j) = \delta(x_{i_1} - x_{j_1}) \delta(x_{i_2} - x_{j_2}) + \delta(x_{j_2} - x_{j_1}) \delta(x_{i_1} - x_{j_2}) \quad (A77)$$

ウィナー積分

直線 $R = (-\infty, \infty)$ 上で自乗可積分である関数をクラス $L^2(R)$ に属するという。 $L^2(R)$ に属する関数 \mathcal{F} に対して、ウィナー積分

$$I_1(\mathcal{F}) = \int_R \mathcal{F}(x) dB(x) \quad (A78)$$

を定義しよう。

先ず、有界な積分区間 (a, b) を考える。 (a, b) 上で自乗可積分である関数 \mathcal{F} は、階段関数 $\mathcal{F}^N(x)$

$$\mathcal{F}^N(x) = \mathcal{F}_n^N; \quad x \in A_n, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (A79)$$

(但し、 N は分割の数)

により, L^2 ノルムの意味で近似できる。つまり,

$$\|g - g^N\| = \int_a^b |g(x) - g^N(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty) \quad (A80)$$

(A79) に対して,

$$I_1(g^N) = \int_a^b g^N(x) dB(x) = \sum_{n=1}^N g_n^N B(d_n, \omega) \quad (A81)$$

と置けば, 右辺は独立ガウス変数の和であるから, 左辺もガウス変数である。その平均値と分散は (A63) により

$$\langle I_1(g^N) \rangle = 0, \quad \langle |I_1(g^N)|^2 \rangle = \sum |g_n^N|^2 d_n = \|g^N\| \quad (A82)$$

となり, 分散は g^N の L^2 ノルムに等しい。

別の分割の数 M をもつ階段関数 $g^M(x)$ を考えると, 同様の計算により,

$$\langle |I_1(g^M) - I_1(g^N)|^2 \rangle = \|g^M - g^N\| \quad (A83)$$

となる。(A80) の条件の下では, $M, N \rightarrow \infty$ ($d_n, d_m \rightarrow 0$) のとき, この右辺は零に収束するので, $I_1(g^M)$ と $I_1(g^N)$ とは自乗平均の意味で同一の極限値に収束する。そこでこの極限を

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(g^N) = I_1(g) = \int_a^b g(x) dB(x) \quad (A84)$$

と書き, ウィナー積分とよぶ。通常のリーマン積分 (スチールチェス積分) が数列の極限として定義されるのに対し, ウィナー積分はランダム変数列の自乗平均極限として定義されることに注意されたい。ランダム変数としてのウィナー積分は, 以下の性質をもつ。

$$(\text{線形性}) \quad I_1(g+f) = I_1(g) + I_1(f) \quad (A85)$$

$$(\text{零平均値}) \quad \langle I_1(g) \rangle = 0 \quad (A86)$$

$$(\text{内積}) \quad \langle I_1^*(g) I_1(f) \rangle = \int f(x) g^*(x) dx \quad (A87)$$

$$(\text{分散}) \quad \langle |I_1(g)|^2 \rangle = \int |g(x)|^2 dx = \|g\| \quad (A88)$$

n 次元コークリッド空間 R^n において自乗可積分である関数を $L^2(R^n)$ に属するという。 $L^2(R^n)$ に属する関数 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が, 階段関数により $L^2(R^n)$ ノルムの意味で近似できることを用いると, 上と全く同様の方法により多重ウィナー積分

$$I_n(g) = \int_{R^n} g(x_1, x_2, \dots, x_n) h^{(n)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_n)] \quad (A89)$$

が定義できる。ここで関数 \mathcal{F} は、変数 (x_1, x_2, \dots, x_n) に関し対称であるとする。(対称でない場合には、対称化することにする。) 多重ウィナー積分 $I_n(\mathcal{F})$ は、ウィナーエルミット微分式の性質 (A76) により、以下の性質をもつ。

$$(\text{線形性}) \quad I_n(\mathcal{F} + f) = I_n(\mathcal{F}) + I_n(f) \quad (\text{A90})$$

$$(\text{零平均値}) \quad \langle I_n(\mathcal{F}) \rangle = 0 \quad (\text{A91})$$

$$(\text{内積}) \quad \langle I_n(\mathcal{F}) I_n^*(f) \rangle = n! \int_{R^n} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) f^*(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (\text{A92})$$

$$(\text{直交性}) \quad \langle I_n(\mathcal{F}) I_m(f) \rangle = 0, \quad (n \neq m) \quad (\text{A93})$$

(ウィナー積分の応用)

$L^2(R)$ における正規直交関数系を $\{\phi_n(x), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ とするとき、

$$X_n(\omega) = \int_R \phi_n(x) dB(x), \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A94})$$

は独立ガウス系列となる。実際、右辺は独立ガウス変数の和(積分)であるから $X_n(\omega)$ もガウス変数である。(A86), (A87)により、

$$\langle X_n(\omega) \rangle = 0 \quad (\text{A94})$$

$$\langle X_n(\omega) X_m(\omega) \rangle = \int \phi_n(x) \phi_m^*(x) dx = \delta_{nm} \quad (\text{A95})$$

ウィナー積分による汎函数展開 (ウィナー展開)

ガウスランダム測度 $dB(x)$ の汎函数 (A68) が、 $L^2(\Omega)$ に属するならば、つまり、

$$\langle |\phi(\omega)|^2 \rangle < \infty \quad (\text{A96})$$

であるならば、多重ウィナー積分により自乗平均の意味で直交展開できる。

$$\phi(\omega) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) h^{(n)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_n)] \quad (\text{A97})$$

この展開は、ウィナーエルミット展開、ウィナー展開とよばれる。ここで、展開係数 f_n は変数に関して対称な関数である。ウィナーエルミット微分式の直交性 (A76) により、

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\omega) h^{(n)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_n)] \rangle \\ &= n! \int_{R^n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (\text{A98})$$

とくに $n=0$ では、

$$\langle \phi(\omega) \rangle = f_0 \quad (\text{A99})$$

が成立する。多重ウィナー積分の直交性 (A93) と (A92) により,

$$\langle |\phi(\omega)|^2 \rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^n} |f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (A100)$$

となる。右辺は非負の数の和であるから、左辺が有界であるためには関数 f_n が $L^2(R^n)$ に属する必要がある。

ガウスランダム測度の移動

$$dB(x) \rightarrow dB(x+a) = dB(x, T^a \omega); \quad (-\infty < a < \infty) \quad (A101)$$

を (A59) の様に見本空間 Ω における ω ベクトルの移動 $\omega \rightarrow T^a \omega$ と見なす。

この移動により汎関数 $\phi(\omega)$ は、 $\phi(T^a \omega)$ へ移動するが、これは

$$\begin{aligned} \phi(T^a \omega) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) h^{(n)}[dB(x_1+a), \dots, dB(x_n+a)] \\ &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f_n(x_1-a, x_2-a, \dots, x_n-a) h^{(n)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_n)] \end{aligned} \quad (A102)$$

と書ける。 $\phi(T^a \omega)$ は、保測変換 T^a により生成された強定常過程で、その相関関数は (A93) により

$$\begin{aligned} \langle \phi(T^a \omega) \phi^*(\omega) \rangle &= \\ &= |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^n} f_n(x_1-a, x_2-a, \dots, x_n-a) f_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (A103)$$

となる。

A 6. 複素ガウスランダム測度による表現

よく知られている様に、ヘルムホルツ方程式などの線形微分方程式を解くには、フーリエ変換により波数領域（空間周波数領域）で解を表現するのが便利で計算の見通しがいよい。そこで、ウィナー展開 (A97) をフーリエ変換を用いて表現することを考えよう。以下では、ガウスランダム測度のフーリエ変換として複素ガウスランダム測度を導入し、次にウィナーエルミット微分式のフーリエ変換により複素ウィナーエルミット微分式を定義する。

ガウスランダム測度 $dB(x)$ のフーリエ変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dB(x, \omega)$$

は、核関数 $e^{-i\lambda x}$ が $L^2(R)$ の元ではないので、ウィナー積分として定義できない。しかし、これを区間 $d\lambda = (\lambda + d\lambda, \lambda)$ で積分した

$$B(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-i\lambda x}}{ix} e^{-i\lambda x} dB(x, \omega) \quad (A104)$$

はウィナー積分として存在する。〔右辺の B と左辺の B とは、異なるランダム関数であるが、同じ記号 B を用い、両者を変数 λ と x で区別する。〕

$dB(x)$ が実であるから、(A104)により

$$B^*(\lambda, \omega) = B(-\lambda, \omega) \quad (A105)$$

ウィナー積分の性質(A86)と(A88)により

$$\langle B(\lambda, \omega) \rangle = 0, \quad \langle |B(\lambda, \omega)|^2 \rangle = \lambda \quad (A106)$$

であり、 λ_1 と λ_2 が共通部分をもたないとき

$$\langle B(\lambda_1, \omega) B^*(\lambda_2, \omega) \rangle = 0 \quad (A107)$$

となる。 $B(\lambda, \omega)$ は、ガウスランダム測度(A63)と類似した性質をもつ複素ガウス変数であるので、複素ガウスランダム測度とよばれる。

微小区間 $d\lambda = d\lambda = (\lambda + d\lambda, \lambda)$ 上の複素ガウスランダム測度を

$$B(d\lambda, \omega) = B(d\lambda, \omega) = dB(\lambda, \omega) \equiv dB(\lambda)$$

と微分の形に書けば、 $dB(\lambda, \omega)$ は性質

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda, \omega) &= dB(-\lambda, \omega) \\ \langle dB(\lambda, \omega) \rangle &= 0 \\ \langle dB(\lambda_1, \omega) dB(\lambda_2, \omega) \rangle &= \delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ \langle dB(\lambda_1, \omega) dB^*(\lambda_2, \omega) \rangle &= \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (A108)$$

をもつ。ここで、 $\delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ は $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき $d\lambda_2$ を表し、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ では零に等しいものとする。この様に δ 関数を自由に使うことにすれば、積分(A104)は形式的に、

$$dB(\lambda, \omega) = \frac{d\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-i\lambda x} dB(x) \quad (A109)$$

と書くことができる。ウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}$ の形式的なフーリエ変換

$$\begin{aligned} h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \\ = d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{-i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)} h^{(n)}[dB(x_1), \dots, dB(x_n)] \end{aligned} \quad (A110)$$

により、複素ウィナーエルミット多項式 $h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)]$ を定義する。〔右辺の $h^{(n)}$ と左辺の $h^{(n)}$ とは異なるものであるが、これらも変数 x と λ で区別することにする〕。(A70)~(A76)を用いて計算すれば、

左辺の具体的な形は，

$$\begin{aligned}
h^{(0)} &= 1 \\
h^{(1)}[dB(\lambda)] &= dB(\lambda) \\
h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] &= dB(\lambda_1)dB(\lambda_2) - \delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\
h^{(3)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), dB(\lambda_3)] &= dB(\lambda_1)dB(\lambda_2)dB(\lambda_3) - dB(\lambda_1)\delta(\lambda_2 + \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3 \\
&\quad - dB(\lambda_2)\delta(\lambda_1 + \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_3 - dB(\lambda_3)\delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2
\end{aligned} \tag{A111}$$

等となり，以下の性質をもつ。

(漸化式)

$$\begin{aligned}
&h^{(1)}[dB(\lambda_1)] h^{(n)}[dB(\lambda_2), dB(\lambda_3), \dots, dB(\lambda_{n+1})] \\
&= h^{(n+1)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_{n+1})] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n+1} h^{(n-1)}[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_{i-1}), dB(\lambda_{i+1}), \dots, dB(\lambda_{n+1})] \\
&\quad \times \delta(\lambda_1 + \lambda_i) d\lambda_1 d\lambda_i
\end{aligned} \tag{A112}$$

(直交性)

$$\begin{aligned}
&\langle h^{(n)}[dB(\lambda_{i_1}), dB(\lambda_{i_2}), \dots, dB(\lambda_{i_n})] \\
&\quad \times h^{(m)}[dB(\lambda_{j_1}), dB(\lambda_{j_2}), \dots, dB(\lambda_{j_m})] \rangle \\
&= \delta_{nm} \delta^n(i+j) d\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} \dots d\lambda_{i_n} d\lambda_{j_1} \dots d\lambda_{j_m}
\end{aligned} \tag{A113}$$

$$\begin{aligned}
&\langle h^{(n)}[dB(\lambda_{i_1}), dB(\lambda_{i_2}), \dots, dB(\lambda_{i_n})] \\
&\quad \times h^{(m)*}[dB(\lambda_{j_1}), dB(\lambda_{j_2}), \dots, dB(\lambda_{j_m})] \rangle \\
&= \delta_{nm} \delta^n(i-j) d\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} \dots d\lambda_{i_n} d\lambda_{j_1} \dots d\lambda_{j_m}
\end{aligned} \tag{A114}$$

ここで， $\delta^n(i-j) [\delta^n(i+j)]$ は，(A30) の δ_{ij}^n において $\delta_{i_\mu j_\nu}$ を $\delta(\lambda_{i_\mu} - \lambda_{j_\nu})$ に $[\delta(\lambda_{i_\mu} + \lambda_{j_\nu})$ に] 置換えたものである。(A77) 参照)
複素ウィナーエルミット多項式を用いると，多重ウィナー積分(A89)は，

$$\begin{aligned}
I_n(\mathcal{J}) &= \int_{R^n} \mathcal{J}(x_1, x_2, \dots, x_n) h^{(n)}[dB(x_1), dB(x_2), \dots, dB(x_n)] \\
&= \int_{R^n} G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)]
\end{aligned} \tag{A115}$$

と書くことができる。ただし G は \mathcal{F} のフーリエ変換

$$G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)} \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (A116)$$

である。 \mathcal{F} が変数 (x_1, x_2, \dots, x_n) に関して対称な関数であるので、 G もその変数に関して対称である。

ガウスランダム測度の汎関数 $\phi(\omega)$ は、展開 (A97) の各項が (A115) の様に複素ウィナーエルミット微分式で表現できるから、

$$\phi(\omega) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \quad (A117)$$

と展開できる。ここで、係数 F_n は f_n の n 次元フーリエ変換であり、(A114) により、

$$\langle \phi(\omega) \rangle = f_0 = F_0, \quad (A118)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(\omega) h^{(n)*}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \rangle \\ = n! F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (A119)$$

となる。同様に、パルセバルの定理 (A100) は、

$$\langle |\phi(\omega)|^2 \rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^n} |F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \quad (A120)$$

となる。

ガウスランダム測度の移動 (A101) に対して、複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda, \omega)$ は、(A109) により

$$dB(\lambda, T^a \omega) = e^{i\lambda a} dB(\lambda, \omega) \quad (A121)$$

と変換することがわかる。従って、(A110) により、複素ウィナーエルミット微分式の変換則は、

$$\begin{aligned} h^{(n)}[dB(\lambda_1, T^a \omega), dB(\lambda_2, T^a \omega), \dots, dB(\lambda_n, T^a \omega)] \\ = e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)a} h^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \end{aligned} \quad (A122)$$

となる。この関係を (A117) に適用すれば、 $\phi(T^a \omega)$ のウィナー展開は、

$$\phi(T^a \omega) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)a} h^{(n)}[dB(\lambda_1) \dots dB(\lambda_n)] \quad (A123)$$

となる。(A114)により $\phi(T^a \omega)$ の相関々数は

$$\begin{aligned} & \langle \phi(T^a \omega) \phi^*(\omega) \rangle \\ &= |F_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^n} |F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (A124)$$

と書ける。

(A117)～(A124)に於いて、積分領域 R^n を $(-\pi, \pi)^n$ に置き換えたものが、(A45)～(A50)である。

A 7. 確率場のウィナー展開

確率過程の一般化には、二つの方向がある。その一つはベクトル値をとる確率過程であって、たとえば、不規則な電圧 $V(t)$ と電流 $I(t)$ との組である。

$$X(t) = [V(t), I(t)]$$

である。この様な確率過程は、多次元確率過程 (Multi-dimensional stochastic process) とよばれる。

第二の方向は、複数のパラメータをもつ確率過程である。たとえば、画像信号 I は、二次元ベクトル $r = (x, y)$ をパラメータとする確率過程である。この様に、空間座標をパラメータにもつ確率過程を確率場 (random field) という。確率場 $I(r)$ の確率分布が、移動 (並進) $I(r) \rightarrow I(r+a)$ に関して不変であるとき、 $I(r)$ を一様確率場 (homogeneous random field) といい、 $r=0$ のまわりの回転 θ に関して確率分布が不変であるとき、等方確率場 (isotropic random field) という。

本節では、一次元のガウスランダム測度・複素ガウスランダム測度を二次元確率場へ拡張し、二次元ガウスランダム測度の汎函数のウィナー展開について述べる。

二次元ガウスランダム測度*

一次元のガウスランダム測度 (A63, A64) の拡張として、二次元ガウスランダム測度を定義する。二次元平面 $R^2 = (-\infty \leq x, y \leq \infty)$ 中の位置ベクトルを $r = (x, y)$ で表し、 R^2 における面積要素を d と書く。

R^2 上の実ガウス変数の系 $\{B(d, \omega)\}$ が、条件*

*) 以下では1次元のガウスランダム測度・複素ガウスランダム測度と同じ記号 B を用い、変数 x, λ, r, λ によりこれを区別する。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. (零平均値)} & \langle B(D, \omega) \rangle = 0 \\ \text{II. (分散が面積に等しい)} & \langle B^2(D, \omega) \rangle = |D| \end{array} \right\} \quad (\text{A125})$$

(但し, $|D|$ は D の面積である)

$$\text{III. } D_1 \text{ と } D_2 \text{ が共通部分をもたないとき, } B(D_1, \omega) \text{ と } B(D_2, \omega) \text{ は独立,} \\ \langle B(D_1, \omega) B(D_2, \omega) \rangle = 0 \quad (\text{A126})$$

IV. D_n ($n=0, 1, 2, \dots$) が相互に共通部分をもたなければ,

$$B\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_n, \omega\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B(D_n, \omega) \quad (\text{A127})$$

を満たすとき, $\{B(D, \omega)\}$ を二次元ガウスランダム測度という。

位置 \mathbf{r} における微小面積 $d = dx dy$ に対して

$$B(d\mathbf{r}, \omega) = dB(\mathbf{r}, \omega) \equiv dB(\mathbf{r}) \quad (\text{A128})$$

と書けば, 微分 $dB(\mathbf{r})$ は次の性質をもつガウス過程である。

$$\langle dB(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad \langle dB(\mathbf{r}_1) dB(\mathbf{r}_2) \rangle = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{A129})$$

ここで, $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$ は, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ のとき $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2$ のとき零であると解釈する。

δ 関数を自由に使うこととし, 二次元複素ガウスランダム測度の微分 $dB(\lambda)$ をフーリエ変換

$$dB(\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i\lambda \mathbf{r}} dB(\mathbf{r}, \omega), \quad \lambda = (\lambda_x, \lambda_y) \quad (\text{A130})$$

により定義する。(A129)により, $dB(\lambda)$ は性質

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda, \omega) &= dB(-\lambda, \omega) \\ \langle dB(\lambda, \omega) \rangle &= 0, \quad \langle dB(\lambda_1, \omega) dB^*(\lambda_2, \omega) \rangle = \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ \langle dB(\lambda_1, \omega) dB(\lambda_2, \omega) \rangle &= \delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{A131})$$

をもつ。

(A101)と同様, $dB(\mathbf{r})$ の移動により保測変換 $T^{\mathbf{a}}$ を定義する。

$$dB(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \omega) = dB(\mathbf{r}, T^{\mathbf{a}}\omega) \quad (\text{A132})$$

この定義により, $T^{\mathbf{a}}$ は,

$$T^0 = 1 \text{ (恒等式)}, \quad T^{\mathbf{a}} T^{\mathbf{b}} = T^{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \quad (\text{A133})$$

を満たす加法群である。(A132)により, 二次元複素ガウスランダム測度の変換則は,

$$dB(\lambda, T^{\mathbf{a}}\omega) = e^{i\lambda \mathbf{a}} dB(\lambda, \omega) \quad (\text{A134})$$

となる。

二次元ガウスランダム測度 $dB(\mathbf{r})$ に関するウィナーエルミット微分式および二次元複素ガウスランダム測度に関する複素ウィナーエルミット微分式は、前節と同じ方法で定義できる。(A66)と(A129)を比較すれば、一次元の $\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$ が二次元では $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$ に置き代わることが分かる。そこで(A70)～(A76)にこの様な置換えをすれば、二次元の場合のウィナーエルミット微分式 $h^{(n)}$ が得られる。

$$\begin{aligned} h^{(0)} &= 1 \\ h^{(1)}[dB(\mathbf{r})] &= dB(\mathbf{r}) \\ h^{(2)}[dB(\mathbf{r}_1), dB(\mathbf{r}_2)] &= dB(\mathbf{r}_1) dB(\mathbf{r}_2) - \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (\text{A135})$$

(漸化式)

$$\begin{aligned} &h^{(1)}[dB(\mathbf{r}_1)] h^{(n)}[dB(\mathbf{r}_2), dB(\mathbf{r}_3), \dots, dB(\mathbf{r}_{n+1})] \\ &= h^{(n+1)}[dB(\mathbf{r}_1), dB(\mathbf{r}_2), \dots, dB(\mathbf{r}_{n+1})] \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} h^{(n)}[dB(\mathbf{r}_2), \dots, dB(\mathbf{r}_{i-1}), dB(\mathbf{r}_{i+1}), \dots, dB(\mathbf{r}_{n+1})] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (\text{A136})$$

(直交性)

$$\begin{aligned} &\langle h^{(n)}[dB(\mathbf{r}_{i_1}), dB(\mathbf{r}_{i_2}), \dots, dB(\mathbf{r}_{i_n})] \\ &\times h^{(m)}[dB(\mathbf{r}_{j_1}), dB(\mathbf{r}_{j_2}), \dots, dB(\mathbf{r}_{j_m})] \rangle \\ &= \delta_{nm} \delta^n(i-j) d\mathbf{r}_{i_1} d\mathbf{r}_{i_2} \dots d\mathbf{r}_{i_n} d\mathbf{r}_{j_1} \dots d\mathbf{r}_{j_m} \end{aligned} \quad (\text{A137})$$

(A108)と(A131)とを比較すれば、一次元の $\delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ が二次元では $\delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ に置換わることになるので、(A111)～(A114)にその様な置換えをすることにより、 $dB(\lambda)$ に関する複素ウィナーエルミット微分式が得られる。

$$\begin{aligned} h^{(0)} &= 1 \\ h^{(1)}[dB(\lambda)] &= dB(\lambda) \\ h^{(2)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2)] &= dB(\lambda_1) dB(\lambda_2) - \delta(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{A138})$$

(漸化式)

$$\begin{aligned} &h^{(1)}[dB(\lambda_1)] h^{(n)}[dB(\lambda_2), dB(\lambda_3), \dots, dB(\lambda_n)] \\ &= h^{(n+1)}[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_{n+1})] \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} h^{(n-1)}[dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_{i-1}), dB(\lambda_{i+1}), \dots, dB(\lambda_{n+1})] \delta(\lambda_1 + \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_n \end{aligned} \quad (\text{A139})$$

(直交性)

$$\begin{aligned} & \langle h^{(n)}[dB(\lambda_{i_1}), dB(\lambda_{i_2}), \dots, dB(\lambda_{i_n})] \\ & \times h^{(m)}[dB(\lambda_{j_1}), dB(\lambda_{j_2}), \dots, dB(\lambda_{j_m})] \rangle \\ & = \delta_{nm} \delta^n(i+j) d\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} \dots d\lambda_{i_n} d\lambda_{j_1} \dots d\lambda_{j_m}, \end{aligned} \quad (A140)$$

$$\begin{aligned} & \langle h^{(n)}[dB(\lambda_{i_1}), \dots, dB(\lambda_{i_n})] \cdot h^{(m)*}[dB(\lambda_{j_1}), \dots, dB(\lambda_{j_m})] \rangle \\ & = \delta_{nm} \delta^n(i-j) d\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} \dots d\lambda_{i_n} d\lambda_{j_1} \dots d\lambda_{j_m} \end{aligned} \quad (A141)$$

二次元ガウスランダム測度の汎函数とウィナー展開

$dB(r) = dB(r, \omega)$ は、強義の一様確率場であるから、(A67)と同じ考えによって、見本空間 Ω 内の無限次元ベクトル ω とみなし

$$\omega = \{dB(r, \omega), r \in \mathbb{R}^2\} \quad (A142)$$

$$\omega_r = dB(r, \omega)$$

と書く。ここで ω_r は ω の r 座標成分を表す。 $\{dB(r)\}$ の汎函数を ω の関数とみて

$$\phi(\omega) = \phi[dB(r), r \in \mathbb{R}^2] \quad (A143)$$

と書く。この右辺は、連続無限個の変数 $dB(r)$ の関数を表すものとする。

$\phi(\omega)$ の分散が有界

$$\langle |\phi(\omega)|^2 \rangle < \infty \quad (A144)$$

であれば、 $\phi(\omega)$ は自乗平均の意味で以下の様にウィナー展開できる。

$$\phi(\omega) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f_n(r_1, r_2, \dots, r_n) h^{(n)}[dB(r_1), \dots, dB(r_n)] \quad (A145)$$

$$= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) h^{(n)}[dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \quad (A146)$$

ここで、 f_n と F_n はそれぞれ変数の入れ換えに関して対称な関数であり、相互にフーリエ変換の関係にある。すなわち、

$$F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i(\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n r_n)} f(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 \dots dr_n, \quad (A147)$$

直交性 (A137) と (A141) により、係数 f_n , F_n は、

$$\langle \phi(\omega) \rangle = f_0 = F_0 \quad (A148)$$

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\omega) h^{(n)}[dB(r_1), \dots, dB(r_n)] \rangle \\ & = n! f_n(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2 \dots dr_n \end{aligned} \quad (A149)$$

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\omega) h^{(n)*} [dB(\lambda_1), dB(\lambda_2), \dots, dB(\lambda_n)] \rangle \\ &= n! F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (A150)$$

で与えられ,

$$\langle |\phi(\omega)|^2 \rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^{2n}} |f_n(r_1, r_2, \dots, r_n)|^2 dr_1 dr_2 \dots dr_n \quad (A151)$$

$$= |F_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^{2n}} |F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \quad (A152)$$

が成立する。

(A145)(A146) に保測変換 (A132)(A134) を施すことにより

$$\begin{aligned} \phi(T^a \omega) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{2n}} f_n(r_1 - a, r_2 - a, \dots, r_n - a) h^{(n)} [dB(r_1), \dots, dB(r_n)] \\ &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{2n}} F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)a} h^{(n)} [dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)] \end{aligned} \quad (A153)$$

が得られる。 $\phi(T^a \omega)$ は強義の一様確率場であって、その相関関数は

$$\begin{aligned} & \langle \phi(T^a \omega) \phi^*(\omega) \rangle \\ &= |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^{2n}} f_n(r_1 - a, r_2 - a, \dots, r_n - a) f_n^*(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 \dots dr_n \\ &= |F_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_{R^{2n}} |F_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)|^2 e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (A154)$$

で与えられる。

文 献

- 1) 前田憲一 : 電波工学, 共立出版(昭34)
- 2) P. Beckmann and A. Spizzichino : **The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces**, Pergamon, Oxford(1963)
- 3) M. I. Skolnik : **Introduction to radar systems**, McGraw-Hill(1962)
- 4) S. I. Ghobarial : Axial cross polarization in reflector antennas with surface imperfections, IEEE Trans. AP-28, 610(1980)
- 5) 古濱洋治 : 人工衛星によるマイクロ波リモートセンシング, 信学誌, 63, 475(昭55)
- 6) A. Ishimaru : **Wave propagation and scattering in random media**, vol. 2 Chap. 21, Academic Press, N. Y.(1978)
- 7) G. G. Zipfel and J. A. DeSanto : Scattering of a scalar wave from a random rough surface : A diagrammatic approach, J. Math. Phys. 13, 1903(1972)
- 8) 中山, 小倉, 松本 : 不規則表面による波動散乱理論, 電磁界理論研究会資料, EMT-79-7(1979)
- 9) J. Nakayama, H. Ogura and B. Matsumoto : Random rough surface scattering, 1979 IEEE international symposium digest-Antennas and propagation, vol 2, 551(1979)
- 10) 中山, 小倉, 坂田 : 2次元不規則表面による波動散乱理論, 電磁界理論研究会資料, EMT-79-48, (1979)
- 11) 小倉, 中山, 坂田 : 不規則表面による電磁波散乱理論, アンテナ伝搬研究会資料 AP-79-98(1979)
- 12) 中山, 坂田, 小倉 : 不規則表面による電磁波散乱理論(II), 電磁界理論研究会資料, EMT-80-7(1980)
- 13) J. Nakayama, H. Ogura and B. Matsumoto : A probabilistic theory of scattering from a random rough surface, Radio Sci. 15, 1049 (1980)
- 14) J. Nakayama, H. Ogura and M. Sakata : Scattering of a scalar wave from a slightly random surface, J. Math. Phys. 22, 471(1981)
- 15) J. Nakayama, H. Ogura and M. Sakata : A probabilistic theory of electromagnetic wave scattering from a slightly random surface:

- l horizontal polarization, Radio Sci. 16, 831(1981)
- 16) J. Nakayama, M. Sakata and H. Ogura : A probabilistic theory of scattering from a slightly random surface: 2 Vertical polarization, Radio Sci. 16, 847(1981)
 - 17) N. Wiener : **Nonlinear problems in random theory**, MIT Press(1958)
 - 18) 今村 勤 : 確率場の数学, 岩波書店(1976)
 - 19) 小倉久直 : 物理工学のための確率過程論, コロナ社(1978)
 - 20) ボルン, ウォルフ : 光学の原理Ⅱ, 第Ⅷ章(草川, 津田訳, 東海大学出版)
 - 21) D. E. Kerr(ed.) **Propagation of short radio waves**, MIT radiation lab. ser. No 13, McGraw-Hill(1951)
 - 22) H. Goldstein : Frequency dependence of the properties of sea echo, Phy. Rev. 70, 938(1946)
 - 23) W. H. Peake : Theory of radar return from terrain, 1951 IRE National Conv. Record, 27(1951)
 - 24) C. R. Grant and B. S. Yapplee : Back scattering from water and land at centimeter and millimeter wave lengths, Proc. IRE, 45, 976(1957)
 - 25) S. O. Rice : Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surface. Comm. Pure. Appl. Math. 4, 351(1951)
 - 26) K. Krishen : Scattering of electromagnetic waves from a layer with rough front and plane back(Small perturbation method by Rice), IEEE Trans. AP-18 537(1970)
 - 27) R. K. Tomas and H. N. Kritikos : Measurement of sea states by RF interferometer, IEEE Trans. GE-13, 73(1975)
 - 28) H. Davis : The reflection of electromagnetic waves from a rough surface, Proc. IEE(London), Monograph No 90, 209(1954)
 - 29) C. I. Beard : Behavior of Non-Rayleigh statistics of microwave forward scattering from a random water surface. IEEE Trans. AP-15, 649(1967)
 - 30) H. W. Marsh, M. Schulkin, and S. G. Kneale : Scattering of underwater sound by the sea surface. J. Acou. Soc. Am., 33, 334(1961)

- 31) H. W. Marsh : Sound reflection and scattering from the sea surface, J. Acou. Soc. Am., 35, 240(1963)
- 32) J. W. Wright : Backscattering from capillary waves with application to sea clutter, IEEE Trans. AP-14, 749(1966)
- 33) F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky and A. D. Rosenberg : Very high frequency radiowave scattering by a disturbed sea surface, IEEE Trans., AP-16, 554(1968)
- 34) G. R. Valenzuela : Depolarization of EM waves by slightly rough surfaces, IEEE Trans., AP-15, 552(1967)
- 35) G. R. Valenzuela : Scattering of electromagnetic waves from a tilted slightly rough surfaces, Radio Sci., 3, 1057(1968)
- 36) A. K. Fung and H. Chan : Backscattering of waves by composite rough surfaces, IEEE Trans. AP-17, 590(1969)
- 37) D. E. Barrick and W. H. Peake : A review of scattering from surfaces with different roughness scales. Radio Sci., 3, 865(1968)
- 38) J. W. Wright : A new model of sea clutter, IEEE Trans., AP-16, 217(1968)
- 39) R. K. Moore and A. K. Fung : Radar determination of winds at sea, Proc. IEEE, 67, 1504(1979)
- 40) D. E. Barrick : First order theory and analysis of MF/HF/VHF scatter from the sea, IEEE Trans., AP-20, 2(1972)
- 41) D. E. Barrick, J. M. Hendrick, R. W. Bogel and D. C. Crombie : Sea backscatter at HF : Interpretation and utilization of the sea echo, Proc. IEEE, 62, 637(1974)
- 42) J. L. Ahearn, S. R. Curley, J. M. Hendrick and D. B. Trizna : Test of remote skywave measurement of ocean surface conditions, Proc IEEE, 62, 681(1974)
- 43) M. L. Boyd and R. L. Devenport : Forward and specular scattering from a rough surface : theory and experiment, J. Acou. Soc. Am. 53, 791(1973)
- 44) C. S. Cray, H. Medwin, W. H. Wright : Specularly scattered sound and the probability density function of a rough surfaces, J. Acou.

- Soc. Am., 53,1667(1973)
- 45) J. G. Zornig : Physical modelling of under water acoustics, in **Ocean Acoustics**, edited by J. A. DeSanto, Springer-Verlag(1979)
 - 46) J. A. DeSanto : Theoretical modeling in ocean acoustics, in **Ocean Acoustics**, edited by J. A. DeSanto, Springer-Verlag(1979)
 - 47) J. A. DeSanto : Green's function for electromagnetic scattering from a perfectly conducting surface, J. Math. Phys. 15 ,283(1974)
 - 48) R. M. Axiline and A. K. Fung : Numerical computation of scattering from a perfectly conducting rough surface, IEEE Trans., AP-26 , 482(1978)
 - 49) H. L. Chan and A. K. Fung : A numerical study of the Kirchhoff approximation in horizontally polarized backscattering from a random surface, Radio Sci., 13, 811(1978)
 - 50) F. G. Bass, V. D. Freilicher and I. M. Fuks : Propagation in statistically irregular waveguide, Part 1, Average field, IEEE Trans., AP-22 , 278(1974)
 - 51) F. T. Ulaby : Vegetation clutter model, IEEE Trans. AP-28 , 538 (1980)
 - 52) 高田, 板倉, 竹鼻, 堤 : 各種路面における反射輝度空間分布特性, G 2-13 昭 55 関西支部連大
 - 53) F. T. Ulaby : Radar response to vegetation, IEEE Trans., AP-23 , 36(1975)
 - 54) F. G. Bass and I. M. Fuks : **Wave scattering from statistically rough surfaces**, Pergamon Press, N. Y. (1979)
 - 55) R. D. Kodis : A note on the theory of scattering from an irregular surface, IEEE Trans., AP-14, 77(1979)
 - 56) A. K. Fung : Scattering and depolarization of EM waves from a rough surface, Proc. IEEE , 54, 395(1966)
 - 57) J. C. Leader : The relationship between the Kirchhoff approximation and small perturbation analysis in rough surface scattering theory, IEEE Trans., AP-20 , 786(1971)
 - 58) G.R. Valenzuela : Comments on "The relationship between the

- Kirchhoff approximation and small perturbation analysis in rough surface scattering theory", IEEE Trans. AP-21, 536(1972)
- 59) P. Beckmann : Shadowing of random rough surfaces, IEEE Trans., AP-13, 384(1965)
- 60) R. A. Brockelman and T. Hagfors : Note on the effect at shadowing on the backscattering of waves from a random rough surface, IEEE Trans. AP-14, 621(1965)
- 61) スミルノフ : 高等数学教程 10, (W 卷, 第 3 分冊), 共立出版
- 62) 宇野, 洪 : ポテンシャル, 培風館, (昭 3 6)
- 63) R. W. Wood : On the remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum, Phil. Mag. 4, 396(1902)
- 64) R. W. Wood : Anomalous scattering gratings, Phy. Rev. 46, 938 (1935)
- 65) Lord Rayleigh : On the dynamical theory of gratings, Proc. Roy. Soc. A79 399(1907)
- 66) C. E. Eckart : A general derivation of the formula for the diffraction by a perfect grating, Phy. Rev. 44, 12(1933)
- 67) Lord Rayleigh : **The theory of sound**, vol. 2, §272, 89-96, 2nd ed. Dover Pub. (1896)
- 68) Lord Rayleigh : Note on the remarkable case of diffraction spectra described by Prof. Wood, Phil. Mag. 16, 60(1907)
- 69) A. Hessel and A. A. Oliner : A new theory of Wood's anomalies on optical gratings. Appl. Optics, 4, 1275(1965)
- 70) 板倉徳也 : 平板状無限格子による電磁波回折の Single Anomaly について, 信学論誌, 51-B, 293(1968)
- 71) 細野敏夫 : コンピュータによる電磁界解析法, 電気学会誌, 93, 13 (1973)
- 72) B. A. Lipmann : Note on the theory of gratings, J. Opt. Soc. Am., 43, 408(1954)
- 73) R. L. Millar : The Rayleigh hypothesis and a related least-square solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers, Radio Sci., 8, 785(1973)

- 74) P. M. Berg and J. T. Fokkoma : The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating, J. Opt. Soc. Am. 69,27(1979)
- 75) 安浦亀之助 : 波動回折問題の新しい数値解法, 電子通信学会誌 57 , 28(1974)
- 76) 安浦, 板倉 : 波動関数の近似法について(I), 九大工学集報 38,72(昭40)
" , " : 完備波動関数系の概念, 九大工学集報, 38,378(昭41)
" , " : 完備波動関数系による近似法の算法, 九大工学集報,39,51
(昭41)
- 77) J. L. Uretsky : The scattering of plane waves from periodic surfaces, Ann. Phys. 33, 400(1965)
- 78) W. C. Meecham : Variational method for the calculation of the distribution of energy reflected from periodic surface I, J. Appl. phys. 27, 361(1956)
- 79) S. O. Rice : Mathematical analysis of random noise, BSTJ. 23, 282(1944)
- 80) H. W. Marsh : Exact solution of wave scattering by irregular surfaces, J. Acou. Soc. Am., 33, 330(1961)
- 81) J. A. Stratton : **Electromagnetic theory**, pp463-464, McGraw-Hill, (1941)
- 82) H. Ogura : Theory of waves in a homogeneous random medium, Phy. Rev. All, 942(1975)
- 83) H. Ogura and Y. Yoshida : Wave propagation in a slightly lossy random medium, Phy. Rev., A14,769(1976)
- 84) J. Nakayama and H. Ogura : Wave propagation in a random periodic structure, 1977 IEEE International Symposium digest-Antennas and Propagation, 490(1977)
- 85) H. Ogura and J. Nakayama : Initial value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium, Phy. Rev. All, 957(1975)
- 86) 長谷川, 小倉, 中山 : ランダム薄層による反射と透過, 電磁界理論研究会資料, EMT-80-37(1980)
- 87) S. Hasegawa : Reflection and transmission of a plane wave through

- a random slab, Master Thesis, Dept. of Electronics, Kyoto
Institute of Technology(1981)
- 88) 伊藤 清 : 確率論, P279, 岩波書店(1953)
 - 89) 伊藤 清 : 重複ウィナー積分について, (北川敏男編, 確率論及び推
計学の進歩) 岩波書店(1953)
 - 90) A. Ishimaru : **Wave propagation and scattering in random media**,
vol. 1, Academic press, N. Y. (1978)
 - 91) 寺沢寛一(編) : 自然科学者のための数学概論(応用編), pp521-560,
岩波書店(昭35)
 - 92) M. I. Skolnik(ed) : **Radar Handbook**, Chap.s 25, 26, McGraw-Hill
(1970)
 - 93) H. L. Frish and S. P. Lloyd : Electron levels in a one-dimensional
random lattice, *Phy. Rev.* 120, 1175(1960)
 - 94) U. Frish : Wave propaqation in random media, in **Probabilistic
method in Applied Mathematics**, ed. by Bharucha-Reid, Academic
Press (1968)
 - 95) V. D. Freilikher and I. M. Fuks : Green's function method for the
Helmholtz equation with perturbed boundary conditions, *Izvestiya
VUZ Radiofizika*, 13,98(1970)
 - 96) 中沢 宏 : 確率場のウィナー展開, *物理学会誌*, 28, 571(1973)
 - 97) 今村 勤 : Wiener-Hermite 展開, *物理学会誌*, 31, 367(1976)
 - 98) J. F. Barrett : The use of functionals in the analysis of nonlinear
physical systems, *J. Electron. Contr.* 15,567(1963)
 - 99) J. F. Barrett : Hermite functional expansion and the calculation
of out-put auto correlation function and spectrum for any
time-invariant nonlinear system with noise input, *J. Elecron.
Contr.* 16, 107(1964)
 - 100) G. R. Valenzuela : The effective reflection coefficients in
forward scatter form a dielectric slightly rough surface, *Proc.
IEEE*, 58, 1279(1970)
 - 101) 伊藤清三 : ルベーク積分入門, P 216, 裳華房(1963)
 - 102) 森口, 宇田川, 一松 : 数学公式Ⅲ, 岩波全書 244

- 103) J. L. Doob : Stochastic Processes, Chap. 10 John Wiley, (1953)
- 104) 中山純一 : 不規則表面の複素モードについて, 電磁界理論研究会資料,
EMT-81-58 (1981)
- 105) 中山純一 : 不規則表面による異常散乱について, 輻射科学研究会資料
(1981年12月)
- 106) J. Nakayama : Anomalous scattering from a slightly random
surface. Accepted for publication in RADIO SCIENCE (1982).